

26^e Journées Graphes et Algorithmes (JGA 2024)



19 au 22 novembre 2024



Université de Bourgogne

Dijon

Le rendez-vous annuel de la communauté francophone de la théorie des graphes et de ses applications, représentée en particulier par le GT Graphes du GDR-IFM et l'axe Complexité, Approximation et Graphes pour la Décision et l'Optimisation (CAGDO) du GDR ROD.



Comité de Programme

- Pierre Aboulker (DI, ENS, Paris)
- Laurent Beaudou (LIMOS, Clermond-Ferrand)
- Thomas Bellitto (LIP6, Paris)
- Cédric Bentz (CEDRIC, CNAM, Paris)
- Stéphane Bessy (LIRMM, Montpellier)
- Marthe Bonamy (LaBRI, Bordeaux)
- Édouard Bonnet (LIP, Lyon)
- Nicolas Bousquet (LIRIS, Lyon)
- Daniel Gonçalves (LIRMM, Montpellier)
- Frédéric Havet (I3S, Sophia Antipolis)
- Chien-Chung Huang (DI ENS, Paris)
- Gwenael Joret (ULB, Bruxelles)
- Aurélie Lagoutte (G-SCOP, Grenoble)
- Mathieu Liedloff (LIFO, Orléans)
- Aline Parreau (LIRIS, Lyon)
- François Pirot (LISN, Orsay)
- Florian Sikora (LAMSADE, Paris)
- Olivier Togni (LIB, Dijon)
- Yann Vaxès (LIS, Marseille)
- Mathilde Vernet (LIA, Avignon)

Comité d'organisation

- Sergey Kirgizov (LIB, Dijon)
- Mohammed Lalou (LIB, Dijon)
- Nader Mbarek (LIB, Dijon)
- Khaydar Nurligareev (LIB, Dijon)
- François Pitois (ENS Lyon)
- Abdallah Skender (LIB, Dijon)
- Olivier Togni (LIB, Dijon)
- Ali Yassin (LIB, Dijon & LIRIS Lyon)

Table des matières

Exposés invités	8
J. Bensmail : Introduire et extraire de l'irrégularité dans les graphes	8
P. Cénac and Y. Offret : Quelques modèles de marches aléatoires sur des graphes	9
W. Lochet : Contraction Decomposition for Unit Disc Graphs and Algorithmic Implications	10
Routage/Requêtes/distribués	11
E. Objois et A. Vladu : Constructing tree-based linear oblivious routings	11
J. Chalopin, S. Das et M. Kokkou : Deterministic Self-Stabilising Leader Election for Constant-Memory Programmable Matter .	12
S. DREYER, A. GENITRINI et M. NAIMA : Tirage uniforme de plus courts chemins	13
F. Galliot, H. La, R. Maistre, M. Petiteau et D. Watel : Reconstruction de graphes à partir de requêtes sur des triplés de sommets	14
Graphes orientés	15
T. Davot, L. Isenmann, S. Roy et J. Thiebaut : Degreewidth : un nouveau paramètre pour résoudre des problèmes dans les tournois	15
M. Petiteau : Orientation contrainte d'un graphe partiellement orienté	16
M. Bonamy, M. Hoffmann, C. Legrand-Duchesne et G. Rote : Un code de Gray énumérant les arbres couvrants de tournois	17
Domination et cliques	18
G. Berthe, M. Bougeret, D. Gonçalves et J.-F. Raymond : Claquer les cliques	18
F. de Montgolfier et R. Torfs : Biclique maximum des graphes Star _{1,2,3} , free sans jumeau et des graphes de bimodularwidth bornée	19
Q. Chuet, H. Demaret, H. La et F. Pirot : Nombre domatique fractionnaire et degré minimum	20
Codes et labelings	21
D. Chakraborty : On full-separating sets in graphs	21
D. de Andrade, J. Araújo, L. Morelle, I. Sau, A. Silva : On the parameterized complexity of computing good edge-labelings .	23

N. Bousquet, Q. Chuet, V. Falgas-Ravry, A. Jacques et L. Morelle : Ensembles localisants dans les graphes sans jumeaux	24
G. Beaudoire : Les graphes bipartis connexes biréguliers (3, 2) sont antimagiques	25
Partitions et packing	26
P. Hoppenot, M. Martin et Z. Szigeti : Packing forests with constraints on the number of connected components	26
J. Bensmail et C. Marcille : Graphes et décompositions fortement localement irrégulières	27
F. S. Benevides, A. L. Quintino et A. Talon : Decomposition des arêtes d'un graphe biparti complet bicolorié en cycles mono- chromatiques	28
Super-graphes et noyaux	29
T. Abrishami, M. Bonamy, C. Gavaille, C. Hilaire et A. Wesolek : Un graphe pour les gouverner tous	29
E. Baucher, F. Dross, C. Gavaille et J. Amaury : Super-graphe de deux arbres : entre P et NPC	30
C. Gavaille et A. Jacques : Graphe Universel pour des graphes sans mineurs	31
R. Naserasr et C. Pujol : On core categorical product of (di)graphs	32
Misc	33
A. Muller, A. Giorgetti, M. Saniga and C. Kelleher : Hypergraphs of linear systems over the two-element field and quantum contex- tuality proofs	33
F. Doré, K. Perrot, A.E. Porreca, S. Riva et M. Rolland : Racines dans le semi-anneau des graphes fonctionnels	34
P. Aboulker, N. Oijid, R. Petit, M. Rocton, C-L. Simon : Computing the degreewidth of a digraph is hard	35
P. Bastide, J. Hodor, H. La, W.T. Trotter : Comment tasser un poset dans un hypercube ?	36
Structure de graphe	37
N. Bousquet, L. Cook et L. Feuilloley, T. Pierron et S. Zeitoun : Certification locale de graphes excluant un sous-graphe induit	37
J. Duron, L. Esperet et J. Raymond : Long induced paths and forbiddent ordered subgraphs	38
M. Bonamy, C. Gavaille, T. Picavet et A. Wesolek :Algorithmes distribués et dimension asymptotique	39

Coloration de graphes	40
D. Gonçalves, L. Picasarri-Arrieta, A. Reinald : Colorations de type Brooks en temps linéaire	40
G. Aubian : des graphes sans triangle de grand nombre chromatique	41
É. Bonnet, R. Bourneuf, J. Duron, C. Geniet, S. Thomassé, N. Trotignon : Une famille docile de graphes sans triangle de nombre chromatique non borné	42
Reconfiguration	43
L. Esperet et U. Giocanti : Coarse geometry of quasi-transitive graphs	43
D. Cranston, M. Mühlenthaler, <u>B. Peyrille</u> : A simple quadratic kernel for Token Jumping on surfaces	44
N. Bousquet, Q. Deschamps, A. Mary, A. Mouwad et T. Pierron : Applications de la reconfiguration de rubans	45
L. De Meyer, F. Kardoš, A. Lagoutte, G. Perarnau : Edge-recoloring with non-increasing potential	46
Graphes dynamiques	47
A. Toullalan, É. Sanlaville et S. Balev : Le problème de la plus courte exploration dans les graphes temporels.	47
A. Casteigts, T. Corsini : À la recherche de l'arbre perdu : difficulté et généralisation de l'arbre couvrant dans les graphes temporels	48
T. Bellitto, J. Bouton Popper et B. Escoffier : Comment rendre un graphe temporel connecté ?	49
Complexité	50
J. Baste, L. Jourdan, ME. Kessaci, N. Tavassoli and ME. Voge : The Parameterized Complexity of Local Search for MTSP . . .	50
C. Dallard, M. Dumas, C. Hilaire, A. Perez : Détection de mineurs induits en temps polynomial	51
F. Fioravantes, H. Gahlawat et N. Melissinos : A parameterized point of view on forming small coalitions	52
T. Martinod : Sur la complexité de l'ensemble Indépendant Dominant avec des Obligations faibles dans les graphes	53
Paramètres de type width/depth	54
A. Doumane, S. Humeau et D. Pous : A finite presentation of graphs of treewidth at most three	54
J. Hodor, H. La, P. Micek, C. Rambaud : Exclure une apex-forêt efficacement	55

J. Ahn, H. Jacob, N. Köhler, C. Paul, A. Reinald, S. Wiederrecht : Structure of twin-width 1 graphs	56
Jeux sur les graphes	57
V. Gledel, N. Oijid, S. Tavenas et S. Thomassé : Complexité des jeux Waiter-Client	57
Duchêne, <u>Dumas</u> , Hilaire, Parreau, : P_5 -game sur les forêts	58
J. Sénizergues et F. Galliot : Jeux positionnels en convention Maker- Maker généralisée	60
Paramètres de type width/depth	61
T. Delépine, H. La et F. Pirot : Profondeur d’élimination : une généralisation de la profondeur arborescente	61
Q. Claus : Une amélioration du théorème de structure de produit pour les graphes excluant un arbre donné comme mineur	62
H. Buffière, E. Kim et P. Ossona de Mendez : Shallow vertex minors, stability, and dependence	63
Coloration de graphes	65
C. Robin et E. Robinson : Coloring bridge-free antiprismatic graphs	65
M. Marin et R. Watrigant : Subcoloring of (unit) disks graphs	66

Introduire et extraire de l'irrégularité dans les graphes

Julien Bensmail, I3S/INRIA, Université Côte d'Azur
julien.bensmail@univ-cotedazur.fr

Durant cet exposé, nous nous intéresserons à deux familles de problèmes ayant trait à la notion d'irrégularité dans les graphes. Pour la première, il est question de rendre un graphe irrégulier (pour une certaine notion d'irrégularité) en appliquant un certain nombre d'opérations élémentaires, tandis que, pour la seconde, il est question de trouver, au sein d'un graphe, un certain nombre de structures irrégulières. La présentation reviendra en particulier sur différents liens entre certaines telles problématiques, leurs différentes motivations, leurs récents développements, ainsi que sur un certain nombre de questions ouvertes intéressantes du domaine.

Quelques modèles de marches aléatoires sur des graphes

Peggy Cénac, IMB, Université de Bourgogne

`peggy.cenac@math.cnrs.fr`

Yoann Offret, IMB, Université de Bourgogne

`yoann.offret@math.cnrs.fr`

L'étude des marches aléatoires sur des graphes est un domaine très fécond des mathématiques, en explorant les graphes, elles permettent d'en extraire de l'information. Dans la grande majorité des cas, quand on ne dispose d'aucune information a priori, la marche étudiée est dite uniforme au plus proche voisin. Il peut être intéressant de souligner que cette façon de se déplacer maximise l'entropie à chaque étape, c'est à dire localement en chaque nœud du graphe. A contrario on peut chercher à maximiser l'entropie globalement c'est à dire sur toutes les trajectoires possibles. Cette approche est riche de sens en Physique théorique et lorsque le graphe est fini on peut montrer aisément qu'un tel processus est défini de manière unique : on l'appelle « la marche aléatoire maximale entropique ». Cependant, il est très difficile d'explicitier, même numériquement, les probabilités de transition ainsi que la mesure invariante de cette chaîne de Markov.

D'autres modèles de marches aléatoires permettent de prendre en compte une mémoire dans l'exploration du graphe, par exemple, les marches aléatoires persistantes, construites à partir de chaînes de Markov à mémoire non bornée, où les longueurs de sauts de la marche ne sont pas forcément intégrables. Un critère de récurrence/transience s'exprimant en fonction des paramètres du modèle sera énoncé. Suivront plusieurs exemples illustrant le caractère instable du type de la marche lorsqu'on perturbe légèrement les paramètres.

Contraction Decomposition for Unit Disc Graphs and Algorithmic Implications

William Lochet, LIRMM, Université de Montpellier
william.lochet@gmail.com

Given a graph G and an integer k , a contraction decomposition consists of a partition of the edges of G into k color classes such that the contraction of any one class results in a graph of treewidth $O(k)$. Starting as an extension of Baker's technique, such decompositions have been proven to exist for planar graphs up to H -minor-free graphs, with many algorithmic consequences for approximation and parameterized algorithms. In this talk, I will present a proof of the existence of such a statement for unit disc graphs.

Joint work with S. Bandyapadhyay, D. Lokshtanov, S. Saurabh, and J. Xue.

Constructing tree-based linear oblivious routings

Etienne Objois, IRIF, Univeristé Paris Cité, objois@irif.fr

Adrian Vladu, CNRS, IRIF, Univeristé Paris Cité, vladu@irif.fr

Given a graph $G = (V, E)$ with n vertices and m edges, and a demand vector on the *pair* of vertices, we would like to compute a flow that satisfies the demand. A routing is an operator that outputs a flow satisfying an input demand. In this presentation, we focus on *linear oblivious routings* (LOR). In a LOR each pair of vertices has an associated pre-computed flow. Whenever one asks for a demand d between vertices s and t , we multiply the associated pre-computed flow by d to obtain the output flow. For a demand, the flow obtained can be seen as a vector on the edges. Given a cost function on the edges, we define the competitive-ratio of a routing \mathcal{A} as :

$$\text{Competitive-ratio}(\mathcal{A}) := \max_{\text{demand } \mathbf{d}} \frac{\text{cost}(\mathcal{A}(\mathbf{d}))}{\text{cost}(\mathcal{OPT}(\mathbf{d}))}.$$

In order to construct a linear oblivious routing, Räcke introduced in [1] *tree-based LOR*. The motivation behind this construction is that in a tree, there is only one way to route the demand between any two vertices. Formally, a *tree-based LOR* is a collection of spanning trees, where for any demand vector, we route a fraction of the demand along each spanning tree. $\mathcal{O}(\log m)$ -competitive tree-based LOR exist on any non-oriented graphs when the cost function is $\|\cdot\|_p$ for $1 \leq p \leq \infty$ [2]. The current algorithm to construct $\mathcal{O}(\log m)$ -competitive tree-based LOR is the following : Given a tree-based LOR, approximate the demand achieving its competitive ratio, then compute a good tree-based LOR for that specific demand and take a linear combination of both routings. The obtained results is a tree-based LOR with a slightly smaller competitive-ratio [3]. We developed a faster algorithm to approximate the demand achieving the competitive-ratio, saving a factor $\mathcal{O}(m^3)$ in the total running time.

Références

- [1] H. Räcke, *Optimal Hierarchical Decompositions for Congestion Minimization in Networks*, STOC (2008)
- [2] M. Englert and H. Räcke, *Oblivious Routing for the L_p -norm*, FOCS (2009), 32–40
- [3] A. Bhaskara and A. Vijayaraghavan, *Approximating Matrix P -Norms*, Siam J. Discrete Algorithm **22** (2011), 497-511

Deterministic Self-Stabilising Leader Election for Constant-Memory Programmable Matter

J eremie Chalopin, LIS, Aix Marseille Univ., jeremie.chalopin@lis-lab.fr
Shantanu Das, LIS, Aix Marseille Univ., shantanu.das@lis-lab.fr
Maria Kokkou, LIS, Aix Marseille Univ., maria.kokkou@lis-lab.fr

Electing a unique leader is central to all distributed systems, including programmable matter. Programmable matter systems comprise of computational entities with constant size memory, called particles. We only consider programmable matter systems to be a set of particles occupying a simply connected subset of vertices of a regular triangular grid. In this context, we present a silent self-stabilising, deterministic, stationary, election algorithm. Our algorithm is the first deterministic self-stabilising algorithm for programmable matter to always stabilise to a configuration with a unique leader, under some fairness conditions [2]. Our result is surprising as it is known that silent self-stabilising algorithms for election in general distributed networks require $\Omega(\log n)$ bits of memory per node, even for ring topologies [1].

First, we present a proof labelling scheme ensuring the existence of a unique leader. Our certificate orients the edges of the network and a configuration is valid when : every edge is oriented, each particle has at most three outgoing edges, outgoing edges appear consecutively around each particle and there are no directed triangles. Then we design a simple algorithm to distributively compute such a certificate. We prove that a configuration with a unique sink is always obtained using this algorithm.

Th eor eme 1 *Starting from an arbitrary simply connected configuration any Gouda fair execution of our algorithm eventually stabilises to a valid configuration containing a unique sink.*

The proof of correctness of our algorithm relies on the special geometric properties of the triangular grid.

R ef erences

- [1] Dolev, S., Gouda, M. & Schneider, M., *Memory requirements for silent stabilization*, Acta Informatica 36, 447–462 (1999). <https://doi.org/10.1007/s002360050180>
- [2] Gouda, M.G., *The Theory of Weak Stabilization*, Lecture Notes in Comp. Sci., vol 2194 (2001). https://doi.org/10.1007/3-540-45438-1_8

Tirage uniforme de plus courts chemins

Simon DREYER, Lip6, Sorbonne Université, simon.dreyer@ens-paris-saclay.fr
Antoine GENITRINI, Lip6, Sorbonne Université, Antoine.Genitrini@lip6.fr
Mehdi NAIMA, Lip6, Sorbonne Université, mehdi.naima@lip6.fr

Savoir tirer des plus courts chemins (PCC) est essentiel dans de nombreux contextes, tels que la simulation de trafic [3] ou l'étude topologique de très grands réseaux [2] (comme le graphe d'Internet).

Prenons un graphe connexe non dirigé, non pondéré ainsi que deux sommets s (source) et t (target). Comment tirer un PCC aléatoire de s à t ? Deux solutions viennent naturellement :

- Lister tous les PCC puis en choisir un au hasard uniformément. [3]
- Donner aux arêtes un poids $1 + \epsilon$ avec ϵ un petit réel aléatoire pour « casser les égalités » puis utiliser l'algorithme de Dijkstra. [1, 2]

Toutefois aucune de ces méthodes n'est complètement satisfaisante. La première peut nécessiter une place mémoire exponentielle pour stocker tous les PCC tandis que la seconde ne garantit pas une distribution uniforme sur les PCC.

Pour répondre à ce problème, nous proposons un algorithme à deux étapes sous forme de précalculs - génération. Les précalculs ont une complexité temporelle et spatiale linéaire en la taille du graphe. Une fois les précalculs faits on est en mesure de générer autant de fois qu'on le souhaite, et de manière uniforme, des PCC de s à t . Nous proposons plusieurs méthodes de génération avec des complexités théoriques allant de $O(n)$ à $O(\ell)$ (avec $\ell = d(s, t)$ la longueur des chemins) et nous les comparons en pratique sur des graphes de grande taille.

Références

- [1] Aaron CLAUSET et Christopher MOORE : Traceroute sampling makes random graphs appear to have power law degree distributions. *arXiv preprint cond-mat/0312674*, 2003.
- [2] Anukool LAKHINA, John W. BYERS, Mark CROVELLA et Peng XIE : Sampling biases in ip topology measurements. *In IEEE INFOCOM 2003.*, volume 1, pages 332–341. IEEE, 2003.
- [3] Guo-Qing ZHANG, Shi ZHOU, Di WANG, Gang YAN et Guo-Qiang ZHANG : Enhancing network transmission capacity by efficiently allocating node capability. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 390(2):387–391, 2011.

Reconstruction de graphes à partir de requêtes sur des triplés de sommets

Florian Galliot, LABRI, Université de Bordeaux,
`florian.galliot@u-bordeaux.fr`
Hoang La, LISN, Université Paris-Saclay,
`hoang.la@universite-paris-saclay.fr`
Raphaëlle Maistre, LISN, Université Paris-Saclay,
`raphael.maistre-matus@universite-paris-saclay.fr`
Matthieu Petiteau, Institut Fourier, Université Grenoble Alpes,
`matthieu.petiteau@univ-grenoble-alpes.fr`
Dimitri Watel, SAMOVAR, Institut Polytechnique de Paris,
`dimitri.watel@ensiie.fr`

Considérons un oracle disposant d'un graphe étiqueté caché à n sommets. L'objectif de notre problème de reconstruction de graphes est de retrouver ce graphe caché en interrogeant l'oracle avec un certain type de requête. Les requêtes que nous examinons portent sur la structure des sous-graphes induits à k sommets pour $3 \leq k \leq n - 1$. Ce problème est une généralisation du problème de la Conjecture de Reconstruction de Graphes de Kelly [1] et Ulam [2] qui affirme qu'étant donné le multiset des n sous-graphes induits (non-étiquetés) à $k = n - 1$ sommets, il existe un unique graphe à n sommets qui les contient exactement. Dans ce contexte, deux questions naturelles se posent. Premièrement, quels sont les graphes que nous pouvons reconstruire (de façon unique) ? Deuxièmement, s'il existe plusieurs graphes qui répondent aux requêtes de la même manière, comment les énumérer efficacement ? Ces questions ont été étudiées par Bastide *et al.* [3] pour les requêtes de connexités sur les triplés ($k = 3$). Nous avons étudié ces deux questions pour tous les autres types de requêtes possibles sur trois sommets.

Références

- [1] P. J. Kelly, *On isometric transformations*, PhD thesis, University of Wisconsin, (1942).
- [2] S. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **8** (1960).
- [3] P. Bastide, L. Cook, J. Erickson, C. Groenland, M. van Kreveld, I. Manens, and J. L. Vermeulen, *Reconstructing graphs from connected triples*, Graph-Theoretic Concepts in Computer Science **Cham** (2023), 16–29.

Degreewidth : un nouveau paramètre pour résoudre des problèmes dans les tournois

Tom Davot, LIERA, Université d'Angers, tom.davot@univ-angers.fr

Lucas Isenmann, ICube, Université de Strasbourg, lucasisenmann@unistra.fr

Sanjukta Roy, Czech Technical University in Prague, sanjukta.roy@fit.cvut.cz

Jocelyn Thiebaud, Czech Technical University in Prague, jocelyn.thiebaud@cvut.cz

Nous proposons un nouveau paramètre, appelé *degewidth*, pour étudier les problèmes difficiles dans les tournois. Ce paramètre mesure à quel point un tournoi est loin d'être acyclique.

Soit T un tournoi. Pour un ordre σ sur V , un arc (v_i, v_j) est un *arc retour* si $v_j < v_i$, autrement il est appelé *arc avant*. Soit v un sommet de T , nous notons $d(v)$ le nombre d'arcs retours incidents à v dans σ . Le *degewidth* de σ , noté $dw(T, \sigma)$ est donné par $\max\{d(v) \mid v \in V(T)\}$. Le *degewidth* de T , noté $dw(T)$ est défini comme le minimum de $dw(T, \sigma)$ pour tous les ordres σ possibles.

Nous avons démontré les résultats suivants.

- Déterminer le *degewidth* d'un tournoi est NP-difficile.
- Le *degewidth* est approchable avec un facteur constant.

Nous avons ensuite mis en évidence que le *degewidth* pouvait être utilisé en tant que paramètre pour certains problèmes classiques :

- DOMINATING SET paramétré par le *degewidth* est FPT dans les tournois.
- FEEDBACK VERTEX SET est NP-difficile dans les tournois *sparses* (c'est-à-dire de *degewidth* au plus 1).

Références

- [1] DAVOT, Tom, ISENMANN, Lucas, ROY, Sanjukta, et al. *Degewidth : A New Parameter for Solving Problems on Tournaments*. In : International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Cham : Springer Nature Switzerland, 2023. p. 246-260.

Orientation contrainte d'un graphe partiellement orienté

Matthieu Petiteau, Institut Fourier, UGA
matthieu.petiteau@univ-grenoble-alpes.fr

Soit $G = (V, E, A)$ un graphe partiellement orienté où E est l'ensemble des arêtes de G et A l'ensemble de ses arcs. Une orientation $\text{dir}G$ de G consiste en l'affectation d'une direction à chaque arête dans E .

Une première contrainte locale que l'on se propose d'observer est une contrainte de parité. Soit T un sous-ensemble des sommets, on dit qu'une orientation $\text{dir}G$ est T -impaire si pour tout sommet v , v a un degré entrant impair dans $\text{dir}G$ si et seulement si v appartient à T .

Chevalier et al. (1983) [1] donnent une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une orientation T -impaire dans un graphe non orienté :

Théorème 2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et T un sous-ensemble des sommets. G admet une orientation T -impaire si et seulement si $|T| \equiv_2 |E|$.*

Depuis le problème a été complexifié en ajoutant d'autres contraintes globales sur l'orientation, en particulier la contrainte d'acyclicité. Une orientation est dite acyclique si elle ne contient pas de circuit. Szegedy (2005)[2] propose alors un algorithme probabiliste polynomial permettant de déterminer l'existence d'une orientation acyclique T -impaire dans un graphe non orienté.

Dans le but de généraliser ce problème, nous l'étudions sur les graphes partiellement orientés, nous montrons qu'il est alors NP-complet :
Soit $G = (V, E, A)$ un graphe partiellement orienté et T un sous-ensemble des sommets, existe-t-il une orientation acyclique T -impaire de G ?

Références

- [1] O. Chevalier et al, *Odd Rooted Orientations and Upper-Embeddable Graphs*. In : North-Holland Mathematics Studies, T. 75. Elsevier, 1983.
- [2] C. Szegedy, *Some Applications of the Weighted Combinatorial Laplacian*, Thèse de doct, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2005

Un code de Gray énumérant les arbres couvrants de tournois

Bonamy, LaBRI, Université de Bordeaux, marthe.bonamy@u-bordeaux.fr

Hoffmann, ETH Zürich, hoffmann@inf.ethz.ch

Legrand-Duchesne, Jagiellonian University, Kraków, clement.legrand@labri.fr

Rote, Freie Universität Berlin, rote@inf.fu-berlin.de

Étant donné un graphe G , soit $\mathcal{T}(G)$ l'ensemble des arbres couvrants de G . Il existe deux opérations de reconfiguration classiques sur $\mathcal{T}(G)$. La première consiste à supprimer une arête, puis à en rajouter une de sorte à obtenir un autre arbre couvrant. On note $\mathcal{F}(G)$ le graphe de reconfiguration ainsi obtenu, aussi appelé *graphe de flip*. La seconde opération, plus restrictive, impose à l'arête ajoutée d'être incidente à l'arête supprimée. On note alors $\mathcal{P}(G)$ le graphe de reconfiguration obtenu, aussi appelé *graphe de pivot*.

Un code de Gray est un algorithme d'énumération ne modifiant qu'un bit d'information entre deux configurations consécutives. Pour les arbres couvrants, cela correspond à un chemin Hamiltonien dans le graphe de flip. Il existe de nombreuses preuves de l'existence de tels codes de Gray [1, 2], en revanche, aucun de ces cycles Hamiltoniens n'est valide dans $\mathcal{P}(G)$.

Nous considérons ici un équivalent orienté de ces questions. Étant donné un graphe orienté \vec{G} et une racine $r \in V(G)$, on considère le graphe de reconfiguration $\mathcal{A}_r(\vec{G})$ dont les sommets sont les arborescences couvrantes enracinées en r , pour l'opération de reconfiguration consistant à pivoter un arc autour de sa cible. Notons que pour tout graphe G , le graphe de pivot de G est isomorphe à $\mathcal{A}_r(\vec{H})$, où \vec{H} est obtenu depuis G en remplaçant chaque arête par deux arcs de direction opposés. Ainsi l'étude du cas orienté est motivée par la recherche d'un chemin Hamiltonien dans le graphe de pivot.

Nous observons que $\mathcal{A}_r(\vec{G})$ contient parfois des chemins mais pas de cycles Hamiltoniens. De plus, nous prouvons que $\mathcal{A}_r(\vec{G})$ contient un chemin Hamiltonien commençant par n'importe quelle arborescence quand \vec{G} est un tournoi.

Références

- [1] R. Cummins. *Hamilton circuits in tree graphs*. IEEE Trans. Circuit Theory, CT-13 :82–90, 1966
- [2] C. Holzmann and F. Harary. *On the tree graph of a matroid*. SIAM J. Appl. Math., 22 :187–193, 1972.

Claquer les cliques

Gaétan Berthe, LIRMM, Université de Montpellier, gaetan.berthe@lirmm.fr
Marin Bougeret, LIRMM, Université de Montpellier, marin.bougeret@lirmm.fr
Daniel Gonçalves, LIRMM, Université de Montpellier, daniel.goncalves@lirmm.fr
Jean-Florent Raymond, LIP, CNRS, jean-florent.raymond@cnrs.fr

Dans le problème K_r -HITTING, étant donné un graphe G et un entier k , il faut décider s'il existe un ensemble contenant au plus k sommets tel que toutes les cliques de r sommets de G sont intersectées par cet ensemble.

Cette présentation portera sur un algorithme pour K_r -HITTING qui s'exécute en temps FPT sous-exponentiel ($2^{k^c} n^{O(1)}$ avec $c < 1$) pour les classes de graphes vérifiant deux conditions simples. L'une est une borne sur la largeur arborescente en fonction du nombre de sommets et de la taille de la plus grande clique, l'autre est une borne sur le nombre de cliques de petite taille.

Comme exemples d'applications, cet algorithme résoud K_r -HITTING en temps FPT sous-exponentiel dans les classes suivantes :

- les graphes de pseudo-disques ;
- les graphes d'intersection de courbes sans $K_{t,t}$ en sous-graphe ; et
- les graphes excluant un graphe H en mineur.

Ce travail a été présenté à la conférence IPEC 2024, et est disponible en prépublication [1].

Références

- [1] G. Berthe, M. Bougeret, D. Gonçalves, J.-F. Raymond, *Kick the cliques*, <https://arxiv.org/abs/2407.01465> (2024).

Biclique maximum des graphes $Star_{1,2,3} - free$ sans jumeau et des graphes de *bimodularwidth* bornée

Fabien de Montgolfier, IRIF, Université Paris Cité, fm@irif.fr

Renaud Torfs, IRIF, Université Paris Cité, torfs@irif.fr

Il existe trois définitions classiques d'une clique bipartie (biclique) maximum d'un graphe biparti : soit maximisant le nombre de sommets, ou maximisant le nombre d'arêtes, ou cherchant une biclique équilibrée de cardinalité maximum. Le premier problème peut être calculé en temps polynomial, les deux derniers sont NP-complets. Ici nous montrons comment ces trois problèmes peuvent être résolus efficacement sur deux classes de graphes bipartis, les graphes $Star_{1,2,3} - free$ sans jumeau, et les graphes avec une *bimodularwidth* bornée, une classe de graphes introduite ici et définie grâce à la décomposition bimodulaire. Notre algorithme se fait en temps $O(n^2)$ et a besoin de la décomposition bimodulaire du graphe, que l'on peut obtenir en $O(n + m)$ pour les graphes $Star_{1,2,3} - free$ [2] et en $O(nm^3)$ pour les graphes de *bimodularwidth* bornée [1].

Références

- [1] J.L. Fouquet, M. Habib, F. de Montgolfier and J.M. Vanherpe, *Bimodular decomposition of bipartite graphs* In : J. Hromkovic, M. Nagl and B. Westfechtel (eds.), Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG 2004. Lecture Notes in Computer Science, vol. 3353, Springer (2004), 117–128.
- [2] R. Quaddoura and J.M. Vanhaerpe, *Linear time recognition of bipartite star123-free graphs*, Technical Report, LaRIA 2002-12 (2002)

Nombre domatique fractionnaire et degré minimum

Quentin Chuet, LISN, Université Paris-Saclay
`quentin.chuet@universite-paris-saclay.fr`

Hugo Demaret, LISN, École Polytechnique
`hugo.demaret@polytechnique.edu`

Hoang La, LISN, Université Paris-Saclay
`hoang.la@universite-paris-saclay.fr`

François Pirot, LISN, Université Paris-Saclay
`francois.pirot@universite-paris-saclay.fr`

Etant donné un graphe G , un ensemble de sommets $X \subseteq V(G)$ est *dominant* si tout sommet $v \notin X$ a au moins un voisin dans X . Le *nombre domatique* de G est le nombre maximum d'ensembles dominants deux-à-deux disjoints dans G . Nous nous intéressons à la relaxation fractionnaire de ce paramètre, à savoir le nombre domatique fractionnaire de G , $\text{fdom}(G)$. De manière équivalente, on peut le définir par

$$\text{fdom}(G) := \max \frac{|\mathcal{F}|}{m(\mathcal{F})},$$

sur l'ensemble des familles \mathcal{F} d'ensembles dominants de G , où $m(\mathcal{F})$ est la multiplicité maximale dans \mathcal{F} d'un sommet de $V(G)$.

Si G est de degré minimum au moins 1, alors $\text{fdom}(G) \geq 2$, ce qui se certifie en prenant dans \mathcal{F} un ensemble indépendant maximal et son complémentaire. Le but de cet exposé sera de montrer que si G est de degré minimum au moins 2, connexe, et n'est pas un des graphes représentés dans la Figure 1, alors $\text{fdom}(G) \geq 5/2$. Cela donne une preuve alternative du fait que tout graphe de degré minimum au moins 2 à n sommets contient un ensemble dominant de taille au plus $2(n+1)/5$ [McCuaig, Shepherd, 1989].

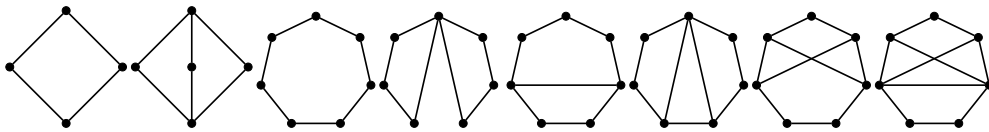


FIGURE 1 – Les huit graphes connexes de degré minimum 2 avec $\text{fdom} < 5/2$.

On full-separating sets in graphs

Dipayan Chakraborty, LIMOS, Université Clermont-Auvergne, France,
dipayan.chakraborty@uca.fr

Annegret K. Wagler, LIMOS, Université Clermont-Auvergne, France,
annegret.wagler@uca.fr

Identification problems in graphs model the monitoring and detection of faults in a network of nodes by usually selecting a vertex subset (the set of “detectors”) that possesses both a *dominating* and a *separating* property. Such a vertex subset is often called a *code* of the graph.

Given a graph $G = (V, E)$, we denote by $N(v)$ and $N[v]$ the *open* and *closed neighborhood*, respectively, of a vertex $v \in V$. Then, a set $C \subseteq V$ is called *closed-separating* (respectively, *open-separating*) if $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$ (respectively, $N(u) \cap C \neq N(v) \cap C$) for any two distinct vertices $u, v \in V$. In addition, C is *locating* if $N(u) \cap C \neq N(v) \cap C$ for all distinct $u, v \in V \setminus C$.

Combining these three separation properties with those of *domination* and *total-domination*, the following six codes have been studied so far in the literature : *locating dominating codes* [4], *locating total-dominating codes* [2], *identifying codes* [3], *identifying total-dominating codes* [2], *open-separating dominating codes* [1] and *open neighborhood locating-dominating sets* [5]. Location is useful when the detectors do not go faulty over time. Closed separation can withstand faults whereby a detector loses the ability to distinguish whether a fault has occurred at itself or at another node. Open separation is helpful in the functioning of a network when a fault destroys a detector.

In this work, we ask, what happens if both the above fault types occur simultaneously in a network? This makes us introduce a stronger form of separating sets that are both open- and closed-separating. We call such a set to be a *full-separating set*; and combining this with both domination and total-domination, we get *full-separating dominating codes* (or FD-codes) and *full-separating total-dominating codes* (or FTD-codes). We denote the minimum order of these two new codes of a graph G by $fd(G)$ and $ftd(G)$, respectively. Like it is the case for the other six codes, we show that the problems of finding a minimum FD- and FTD-code are NP-complete.

Interestingly, we also find that $ftd(\cdot)$ and $fd(\cdot)$ differ by at most 1. However, we show that, despite this small difference, it is NP-hard to decide in general if the two code numbers differ or equal each other on a given graph. Apart from the complexity results, we also investigate the two code numbers on some well-known graph classes like paths, cycles, half-graphs and headless spiders and find exactly the values of these parameters on such graphs.

Références

- [1] Chakraborty, D., Wagler, A.K. : Open-Separating Dominating Codes in Graphs. In : Basu, A., Mahjoub, A.R., Salazar González, J.J. (eds) Combinatorial Optimization. ISCO 2024, Lecture Notes in Computer Science **14594**, pp. 137–151 (2024).
- [2] Haynes, T.W., Henning, M. A., Howard, J. : Locating and total-dominating sets in trees, *Discrete Applied Mathematics* **154**, pp. 1293–1300 (2006).
- [3] Karpovsky, M.G., Chakrabarty, K., Levitin, L.B. : On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory* **44**(2), pp. 599–611 (1998).
- [4] Slater, P.J. : Dominating and reference sets in a graph, *Journal of Mathematical and Physical Sciences* **22**, pp. 445–455 (1988).
- [5] Seo, S.J., Slater, P.J. : Open neighborhood locating dominating sets, *Australasian Journal of Combinatorics* **46**, pp. 109–119 (2010).

On the parameterized complexity of computing good edge-labelings

Davi de Andrade, Departamento de Ciências da Computação, Universidade Federal do Ceará, daviandradeiacono@gmail.com

Júlio Araújo, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, julio@mat.ufc.br

Laure Morelle, LIRMM, Université de Montpellier, laure.morelle@lirmm.fr

Ignasi Sau, LIRMM, Université de Montpellier, ignasi.sau@lirmm.fr

Ana Silva, Departamento de Ciências da Computação, Universidade Federal do Ceará, anasilva@mat.ufc.br

A *good edge-labeling* (gel for short) of a graph G is a function $\lambda : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ such that, for any ordered pair of vertices (x, y) of G , there do not exist two distinct increasing paths from x to y , where “increasing” means that the sequence of labels is non-decreasing. This notion was introduced by Bermond et al. [Theor. Comput. Sci. 2013] motivated by practical applications arising from routing and wavelength assignment problems in optical networks. Prompted by the lack of algorithmic results about the problem of deciding whether an input graph admits a gel, we initiate its study from the viewpoint of parameterized complexity.

Ensembles localisants dans les graphes sans jumeaux

Nicolas Bousquet, LIRIS, Université Claude Bernard Lyon 1, nicolas.bousquet@liris.cnrs.fr
Quentin Chuet, LISN, Université Paris-Saclay, quentin.chuet@lisn.fr
Victor Falgas-Ravry, Umeå Universitet, Suède, victor.falgas-ravry@umu.se
Amaury Jacques, LaBRI, Université de Bordeaux amaury.jacques@labri.fr
Laure Morelle, LIRMM, Université de Montpellier, laure.morelle@lirmm.fr

Un ensemble *localisant* d'un graphe connexe G est un ensemble de sommets X tel que chaque sommet de $V(G) \setminus X$ est *localisé* par X , c'est à dire que son voisinage dans X est unique. Cet ensemble est dit *localisant-dominant* si il est à la fois localisant et dominant. On note $LD(G)$ la taille du plus petit ensemble localisant-dominant de G , et on étudie ce paramètre en fonction du nombre de sommets n . Notons que la borne triviale $LD(G) \leq n - 1$ est atteinte par K_n et $K_{1,n-1}$, deux graphes qui contiennent beaucoup de *jumeaux*, c'est à dire des sommets qui ont le même voisinage (ouvert ou fermé).

Partant de ce constat, il est intéressant de se restreindre à la classe des graphes sans jumeaux. Garijo et al. [1] ont montré que de tels graphes vérifient $LD(G) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$, et ont conjecturé que $LD(G) \leq \frac{n}{2}$. Foucaud et al. ont amélioré cette borne à $LD(G) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$, et ont décrit plusieurs familles de graphes attestant que cette conjecture serait optimale. Nous montrons que tout graphe sans jumeaux à n sommets vérifie $LD(G) \leq \lceil \frac{5n}{8} \rceil$, cf. [3].

Références

- [1] D.Garijo, A. González and A. Márquez, *The difference between the metric dimension and the determining number of a graph*, Applied Mathematics and Computation 249 (2014) : 487–501.
- [2] F. Foucaud, M.A. Henning, C. Löwenstein and T. Sasse, *Locating-dominating sets in twin-free graphs*, Discrete Applied Mathematics 200 (2016) : 52–58.
- [3] N. Bousquet et al. *A note on locating sets in twin-free graphs*, arXiv preprint arXiv :2405.18162 (2024).

Les graphes bipartis connexes biréguliers $(3, 2)$ sont antimagiques

Grégoire Beaudoire, CEDRIC, CNAM Paris, gregoire.beaudoire@lecnam.net

Cédric Bentz, CEDRIC, CNAM Paris, cedric.bentz@lecnam.net

Christophe Picouleau, CEDRIC, CNAM Paris, christophe.picouleau@lecnam.net

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, connexe, avec $|V| = n$ et $|E| = m$. Soit $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ un étiquetage bijectif des arêtes de G . Pour tout sommet $u \in V$, on définit $\sigma(u) = \sum_{v \in V: uv \in E} f(u, v)$ la somme des étiquettes des arêtes incidentes à u . Si tous les $\sigma(u)$ sont deux à deux distincts, alors f est un *étiquetage antimagique* de G . Les étiquetages antimagiques ont été introduits par Hartsfield et Ringel [1] en 1990, avec la conjecture suivante, toujours ouverte à l'heure actuelle :

Conjecture 3 *Tous les graphes connexes sauf K_2 sont antimagiques.*

Plus récemment, de multiples avancées ont été réalisées afin de montrer que certains types de graphes sont antimagiques, notamment les graphes réguliers (2015). En 2023, Yu montrait que les graphes bipartis biréguliers (s, t) sont antimagiques si et seulement si $|s - t| \geq 2$ et s ou t impair [2].

À l'aide d'une nouvelle construction, nous étendons ces résultats aux graphes bipartis connexes biréguliers $(3, 2)$.

Références

- [1] N. Hartsfield and G. Ringel, *Pears in Graph Theory : A Comprehensive Introduction*, Dover Books on Mathematics (1990).
- [2] X. Yu, *Antimagic labeling of biregular bipartite graphs*, *Discrete Applied Mathematics* **327** (2023), 47–59.

Packing forests with constraints on the number of connected components

Pierre Hoppenot, G-SCOP, UGA, pierre.hoppenot@grenoble-inp.fr
Mathis Martin, Mines de Saint Étienne
Szigeti Zoltán, G-SCOP, UGA, zoltan.szigeti@grenoble-inp.fr

The seminal papers of Edmonds [2], Nash-Williams [4] and Tutte [5] have laid the foundations of the theories of packing arborescences and packing trees. The directed version has been extensively investigated, resulting in a great number of generalizations. In contrast, the undirected version has been marginally considered. The aim of this paper is to further develop the theories of packing trees and forests. Our main result on graphs characterizes the existence of a packing of k forests, F_1, \dots, F_k , in a graph G such that each vertex of G belongs to exactly h of the forests, the number of connected components of each F_i is between $\ell(i)$ and $\ell'(i)$ and the total number of connected components in the packing is between α and β . Finally, we extend this result to hypergraphs and dypergraphs, the latter giving a generalization of a theorem of Bérczi and Frank [1]. As a matter of fact, this research was motivated by the paper of Bérczi and Frank [1].

Références

- [1] K. Bérczi, A. Frank, *Supermodularity in Unweighted Graph Optimization I : Branchings and Matchings*, Math. Oper. Res. 43(3) (2018) 726–753.
- [2] J. Edmonds, *Edge-disjoint branchings*, in Combinatorial Algorithms, B. Rustin ed., Academic Press, New York, (1973) 91–96.
- [3] P. Hoppenot, M. Martin, Z. Szigeti, *Packing forests*, arXiv :2310.13341 (2024)
- [4] C. St. J. A. Nash-Williams, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*, Journal of the London Mathematical Society, 36 (1961) 445–450.
- [5] W.T. Tutte, *On the problem of decomposing a graph into n connected factors*, Journal of the London Mathematical Society, 36 (1961) 221–230.

Graphes et décompositions fortement localement irrégulières

Julien Bensmail, Université Côte d'Azur, CNRS, Inria, I3S,
Julien.BENSMAIL@univ-cotedazur.fr

Clara Marcille, Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, LaBRI, Talence,
clara.marcille@u-bordeaux.fr

Un graphe est localement irrégulier si aucune paire de sommets adjacents n'ont le même degré, et une décomposition localement irrégulière est une partition des arêtes en graphes localement irréguliers. Ces notions s'inscrivent dans le champs des tentatives de construire un antonyme aux graphes réguliers, auquel appartiennent de nombreux problèmes comme les labellings propres et la 1-2-3 Conjecture.

Dans cette présentation, nous présentons une alternative plus forte pour la notion de graphes et de décompositions localement irrégulières, dite fortement localement irrégulières, où l'irrégularité est renforcée dans le sens que deux sommets adjacents ont des degrés qui diffèrent d'au moins 2. Nous comparons en particulier cette nouvelle notion aux résultats connus sur les graphes irréguliers et les décompositions irrégulières, en montrant des similarités mais aussi des différences très importantes. Par exemple, caractériser les graphes possédant une décomposition fortement irrégulière est NP-difficile (mais polynomial pour les décompositions irrégulières). Nous établissons également des bornes générales, et pour différentes classes de graphes.

Partition des sommets de $K_{n,n}$ dont les arêtes sont vertes ou violettes en 4 cycles monochromatiques

Fabrício Siqueira Benevides, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, fabricio@mat.ufc.com.br

Arthur Lima Quintino, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará

Alexandre Talon, GSCOP, Université Grenoble Alpes

Nous considérons ici des graphes simples, et les colorations de leurs arêtes avec deux couleurs. On souhaite partitionner les sommets d'un tel graphe en un minimum de cycles monochromatiques. Ici un cycle soit un cycle classique avec au moins 3 sommets, soit un sommet ou une arête. On se demande alors, quels que soient le graphe et une coloration en vert et violet de ses arêtes, de combien de cycles monochromatiques on a besoin dans le pire des cas.

Quand le graphe à décomposer est une clique, Bessy et Thomassé [1] ont prouvé en 2010 que deux cycles monochromatiques suffisent, confirmant une conjecture de Lehel en 1970.

Nous nous sommes intéressés aux graphes bipartis complets équilibrés ($K_{n,n}$). Si la coloration est *split*, alors trois cycles monochromatiques (voire deux dans certains cas) suffisent pour partitionner les sommets d'un $K_{n,n}$. Notre résultat est le suivant, valable pour une bicoloration quelconque :

Théorème *Si G est un graphe complet biparti équilibré dont les arêtes sont colorées en vert et violet, alors les sommets de G peuvent être partitionnés en au plus 4 cycles monochromatiques.*

Notre preuve n'est pas constructive : après avoir montré quelques résultats préliminaires sur la structure de la coloration, nous supposons qu'une telle partition n'existe pas et en déduisons plus de structure sur la coloration des arêtes. L'essentiel de la preuve est effectué par récurrence, l'étape de récurrence utilisant une étude de cas.

Références

- [1] S. Bessy et S. Thomassé, *Partitioning a graph into a cycle and an anticycle, a proof of Lehel's conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 100(2) (2010) 176–180.

Un graphe pour les gouverner tous

Tara Abrishami, University of Hamburg, tara.abrishami@uni-hamburg.de
Marthe Bonamy, LaBRI, Université de Bordeaux, marthe.bonamy@u-bordeaux.fr
Cyril Gavoille, LaBRI, Université de Bordeaux, cyril.gavoille@u-bordeaux.fr
[Claire Hilaire](mailto:claire.hilaire@upr.si), FAMNIT, University of Primorska, claire.hilaire@upr.si
Alexandra Wesolek, Technische Universität Berlin, agwesole@sfu.ca

Depuis le célèbre Grid Minor Theorem de Robertson Seymour et Thomas [1], nous savons que tous les graphes planaires à au plus n sommets sont mineurs de la grille carré (donc aussi planaire) à $4n^2$ sommets. Avec Cyril Gavoille, nous avons prouvé récemment que ce résultat se généralise à toutes les classes de graphes plongeable sur une surface [2] : pour toute surface Σ , il existe c tel que pour tout n , il existe un graphe U_n plongeable sur Σ avec au plus cn^2 sommets qui admet pour mineur tous les graphes d'au plus n sommets plongeables sur Σ .

On dit alors que U_n est un *majeur universel* pour la classe des graphes à au plus n sommets plongeable sur Σ , et de façon similaire, la grille à cn^2 sommets est un majeur universel pour la classe des graphes planaires à au plus n sommets.

Ces travaux amènent à se demander si l'on peut trouver un tel majeur universel de taille polynomial pour toutes les classes closes par mineur :

Conjecture. *Pour toute famille de graphes \mathcal{F} , il existe une constante c telle que pour tout n , il existe un graphe excluant \mathcal{F} comme mineur et avec au plus n^c sommets, qui est majeur universel pour la classe des graphes à au plus n sommets et excluant \mathcal{F} comme mineur.*

Dans un projet en cours avec Tara Abrishami, Marthe Bonamy, Cyril Gavoille et Alexandra Wesolek, nous nous intéressons à cette conjecture. Elle s'avère être fausse dans le cas général, mais nous trouvons plusieurs classes classiques qui vérifient la conjecture, et nous prouvons une version approximative de la conjecture dans le cas général.

Références

- [1] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, *Quickly Excluding a Planar Graph.*, J. Comb. Theory B **62** (1994), 323–348.
- [2] C. Gavoille and C. Hilaire *Minor-Universal Graph for Graphs on Surfaces*, Tech. Rep. [2305.06673](https://arxiv.org/abs/2305.06673), arXiv, (2023).

Super-graphe de deux arbres : entre P et NPC

Edgar Baucher, LaBRI, U. Bordeaux, edgar.baucher@labri.fr

François Dross, LaBRI, U. Bordeaux, francois.dross@labri.fr

Cyril Gavoille, LaBRI, U. Bordeaux, gavoille@labri.fr

Amaury Jacques, LaBRI, U. Bordeaux, amaury.jacques@labri.fr

Nous introduisons ici un ensemble de problèmes de décision qui se situe sur la frontière (si elle existe) entre P (l'ensemble des problèmes solvables en temps polynomial) et NPC (l'ensemble des problèmes NP-Complets).

Le problème général est le suivant : étant donné en entrée deux arbres T_1, T_2 et un entier N , existe-t-il un graphe U contenant T_1 et T_2 et qui a exactement N sommets ?

Il existe beaucoup de variantes de ce que veut dire “contenant T_1 et T_2 ”. Les plus connues sont les notions de contenir au sens de sous-graphe, ou de sous-graphe induit. Nous introduisons dans cet exposé la notion de sous-graphe k -isométrique, qui est un sous-graphes dans lequel les distances de 0 à k sont conservées. Par exemple, un sous-graphe induit est un sous-graphe 1-isométrique car c'est l'adjacence (distance 1) qui est conservée. Plus formellement, un graphe G est un sous-graphe k -isométrique d'un graphe H si toute paire de sommets qui sont à distance d dans G sont à distance d dans H si $d \leq k$, et à distance strictement supérieure à d sinon.

Le problème décrit plus haut est trivialement dans P pour “contenir” au sens de sous-graphe. Le problème est NP-Complet pour le sens de sous-graphe induit et nous montrons qu'il est polynomial pour le sens de sous-graphe ∞ -isométrique.

Enfin, pour généraliser ce problème de décision, on peut le paramétrer par une fonction $k(n)$, avec n la taille des arbres en entrée, et la question devient : existe-t-il un graphe qui contient T_1 et T_2 en tant que sous-graphe $k(n)$ -isométrique, et qui a exactement N sommets ? Nous montrons que le problème est polynomial si $k(n) > n/2$, et nous pensons qu'il est NP-Complet pour $k(n) \leq n^c$ pour tout $c < 1$. Laissant ainsi ouverte la question : pour quelle fonction $k(n)$ le problème passe-t-il de NP-Complet à polynomial ?

Graphe universel pour les graphes sans mineur

Cyril Gavoille, LABRI, Université de Bordeaux, gavoille@labri.fr
Amaury Jacques, LABRI, Université de Bordeaux, amaury.jacques@labri.fr

Un *graphe universel induit* (GUI) pour une famille sF est un graphe U contenant tous les graphes de sF comme sous-graphes induits. On s'intéresse ici à minimiser sa taille, c'est-à-dire le nombre de sommets de U .

Pour la famille de tous les graphes planaires à n sommets, un GUI de taille $n \cdot 2^{\sqrt{\log n}}$ est connu [1, 4]. De manière plus générale, les graphes sans mineur (*H-minor-free*) possèdent un GUI de taille $n^2 \cdot (\log n)^{O(1)}$ [3]. À notre connaissance, la meilleure borne inférieure connue pour les graphes planaires est de $11 \lfloor \log n \rfloor / 6$, obtenue par [2] en considérant une famille de 3 graphes planaires particuliers à n sommets. Montrer une meilleure borne inférieure, par exemple super-linéaire, à l'aide d'une famille restreinte de graphes, semble difficile. En effet, nous montrons que toute famille de t graphes planaires, et plus généralement sans mineur, possède un GUI de taille $O(\sqrt{t} \cdot n)$.

Par ailleurs, pour les graphes planaires, nous montrons une nouvelle borne inférieure de $10.52n$. De plus, nos résultats précédents démontrent que dépasser cette borne nécessiterait de considérer une famille d'au moins $t \geq 140$ graphes planaires.

Références

- [1] V. DUJMOVIĆ, L. ESPERET, C. GAVOILLE, G. JORET, P. MICEK, AND P. MORIN, *Adjacency labelling for planar graphs (and beyond)*, Journal of the ACM, 68 (2021), pp. Article No. 42, pp. 1–33.
- [2] L. ESPERET, A. LABOUREL, AND P. OCHEM, *On induced-universal graphs for the class of bounded-degree graphs*, Information Processing Letters, 108 (2008), pp. 255–260.
- [3] C. GAVOILLE AND A. LABOUREL, *Shorter implicit representation for planar graphs and bounded treewidth graphs*, in 15th Annual European Symposium on Algorithms (ESA), L. Arge and E. Welzl, eds., vol. 4698 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, Oct. 2007, pp. 582–593.
- [4] P. GAWRYCHOWSKI AND W. JANCZEWSKI, *Simpler adjacency labeling for planar graphs with B-trees*, in 25th Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA), ACM-SIAM, Jan. 2022, pp. 24–36.

On cores of categorical product of (di)graphs

Reza Naserasr, Université Paris Cité, CNRS, IRIF, F-75013, Paris, reza@irif.fr
Cyril Pujol, Université Paris Cité, IRIF, Paris, cpujol@irif.fr

The core of a graph is the smallest graph (in terms of number of vertices) to which it is homomorphically equivalent. The question of the possible order of the tensor product (also known as categorical, Heidetnemi or direct product) of two graphs captures some well known problems. For instance, recent counter-example to the Heidetnemi conjecture for 5-chromatic graphs is equivalent to saying that there are core graphs of large order whose product has a core of order 4.

In this work, motivated by a question from Leonid Libkin in the area of graph databases [1] we build families of graphs and digraph each on at most n vertices such that the core of the tensor product of all of them has an order doubly exponential in n .

Références

- [1] Giovanni Amendola and Leonid Libkin, *Explainable Certain Answers*, IJCAI 2018

Hypergraphs of linear systems over the two-element field and quantum contextuality proofs

Axel Muller and Alain Giorgetti, Université de Franche-Comté, CNRS, institut FEMTO-ST, F-25000 Besançon, France, `firstname.lastname@femto-st.fr`

Metod Saniga, Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, SK-05960 Tatranská Lomnica, Slovakia

Colm Kelleher, Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne, ICB/UTBM, UMR 6303, CNRS, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, F-90010 Belfort Cedex, France

MaxLin2 is the problem of maximizing the number of satisfied equations in a linear system over the two-element field [2]. Hypergraphs can naturally be associated with these systems and the subsets of their equations satisfied and unsatisfied by a given zero-one assignment of their variables. They provide a useful visual perspective on these abstract algebraic problems.

After introducing the quantum phenomenon called *contextuality* (see, e. g., [1] for a comprehensive review), we link its existence proofs with MaxLin2. Then we present a new heuristic method for MaxLin2, inspired by the (hyper)graphic perspective. It brings out particular symmetrical hypergraphs, as detailed in a joint work with Frédéric Holweck [3].

Financial support. This work is supported in part by the PEPR integrated project EPIQ ANR-22-PETQ-0007 part of Plan France 2030, by the project TACTICQ of the EIPHI Graduate School (contract ANR-17-EURE-0002), by the Slovak VEGA grant agency, project number 2/0043/24 and by the Bourgogne-Franche-Comté Region.

Références

- [1] C. Budroni, A. Cabello, O. Gühne, M. Kleinmann, and J.-Å. Larsson. Kochen-Specker contextuality. *Rev. Mod. Phys.*, 94 :045007, Dec. (2022). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.94.045007>.
- [2] R. Crowston, M. Fellows, G. Gutin, M. Jones, F. Rosamond, S. Thomasse, and A. Yeo. Simultaneously satisfying linear equations over \mathbb{F}_2 : MaxLin2 and Max- r -Lin2 parameterized above average, May 2011.
- [3] A. Muller, M. Saniga, A. Giorgetti, F. Holweck, and C. Kelleher. A new heuristic approach for contextuality degree estimates and its four- to six-qubit portrayals, 2024. <https://arxiv.org/abs/2407.02928>.

Racines dans le semi-anneau des graphes fonctionnels

François Doré, LaBRI, Université de Bordeaux, `francois.dore@u-bordeaux.fr`

Kévin Perrot, LIS, Aix-Marseille Université, `kevin.perrot@lis-lab.fr`

Antonio E. Porreca, LIS, Aix-Marseille Université, `antonio.porreca@lis-lab.fr`

Sara Riva, CRISAL, Université de Lille `sara.riva@univ-lille.fr`

Marius Rolland, LIS, Aix-Marseille Université, `marius.rolland@lis-lab.fr`

Les graphes fonctionnels sont des graphes dont chaque sommet a un degré sortant exactement égal à 1, et sont ainsi caractérisables par une endofonction de l'ensemble de sommets vers lui-même. Ils permettent entre-autre de modéliser divers phénomènes évoluant de manière déterministe dans le temps. Une fois munis d'une opération de somme et de produit, que sont respectivement l'union disjointe et le produit direct, ces derniers forment un semi-anneau commutatif [1]. Cette structure algébrique motive alors naturellement la construction d'équations polynomiales, pouvant modéliser diverses hypothèses sur lesdits phénomènes. Pour être en mesure de résoudre ces équations, il est nécessaire d'avoir à disposition des algorithmes permettant de réaliser la division et la racine k-ème. En exploitant la notion d'*unroll*, introduite dans [2], nous présentons ici deux algorithmes polynomiaux permettant de réaliser ces tâches, sous la condition que le résultat soit connexe. De concert, ces algorithmes mènent alors à une résolution efficace d'équations du type $AX^k = B$, ce qui constitue l'une des dernières étapes avant la résolution complète d'équation polynomiales plus générales [3].

Références

- [1] A. Dennunzio, V. Dorigatti, E. Formenti, L. Manzoni and A.E. Porreca, *Polynomial equations over finite, discrete-time dynamical systems*, Cellular Automata, 13th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, ACRI 2018 **11115** (2018), 298–306.
- [2] E. Naquin and M. Gadouleau, *Factorisation in the semiring of finite dynamical systems*, Theoretical Computer Science **998** (2024) 114509.
- [3] A. Dennunzio, E. Formenti, L. Margara, and S. Riva, *An algorithmic pipeline for solving equations over discrete dynamical systems modeling hypothesis on real phenomena* Journal of Computational Science **66** (2023), 101932.

Computing the degreewidth of a digraph is hard

Pierre Aboulker, DIENS, École Normale Supérieure, pierreaboulker@gmail.com
Nacim Oijid, LaBRI, Université de Bordeaux, nacim.oijid@u-bordeaux.fr
Robin Petit, Algorithms Research Group, Université Libre de Bruxelles,
robin.petit@ulb.be
Mathis Rocton, Algorithm and Complexity Group, TU Wien, mrocton@ac.tuwien.ac.at
Christopher-Lloyd Simon, Department of Mathematics, The Pennsylvania
State University, cks6029@psu.edu

Pour tout digraphe D et tout ordre \prec sur ses sommets, nous pouvons définir le *backedge graph* D^\prec comme le graphe non-dirigé sur les mêmes sommets dont les arêtes joignent les paires $\{v, w\}$ telles que $v \prec w$ et (w, v) est un arc de D .

Le paramètre *degreewidth* a été introduit par Davot, Isenmann, Roy et Thiebaut à WG 2023 [1] : la *degreewidth* d'un digraphe D est définie comme $\vec{\Delta}(D) = \min_{\prec} \Delta(D^\prec)$. Le problème de décision consistant à reconnaître les paires (D, k) telles que $\vec{\Delta}(D) \leq k$ a été montré NP-complet sur les tournois, et un algorithme FPT a été déterminé [1]. Le problème consistant à reconnaître, à $k \geq 0$ fixé, les digraphes tels que $\vec{\Delta}(D) \leq k$ a été montré NP-complet pour tout $k \geq 2$ par Keeney et Lokshtanov à WG 2024 [2]. Ces derniers ont posé la question pour $k = 1$, et nous y avons répondu par le théorème suivant.

Théorème 1 ([3]). Pour $k \geq 1$ un entier fixé, déterminer si $\vec{\Delta}(D) \leq k$ est NP-complet, même en se restreignant aux 1-subdivisions de multigraphes.

Références

- [1] T. Davot, L. Isenmann, S. Roy and J. Thiebaut, *Degreewidth : A New Parameter for Solving Problems on Tournaments*, International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (2023), 246–260
- [2] R. Keeney and D. Lokshtanov, *Degreewidth on semi-complete digraphs*. International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (2024), not yet published.
- [3] P. Aboulker, N. Oijid, R. Petit, M. Rocton, CL. Simon, *Computing the degreewidth of a digraph is hard*, arXiv preprint arXiv:2407.19270 (2024).

Comment tasser un poset dans un hypercube ?

Paul Bastide, LaBRI - TU Delft, Université de Bordeaux, paul.bastide@ens-rennes.fr
Jedrzej Hodor, Jagiellonian University, jedrzej.hodor@gmail.com
Hoang La, LISN, Université Paris-Saclay, hoang.la.research@gmail.com
William T. Trotter, Georgia Tech, wtt.math@gmail.com

Recemment, Carla Groenland, Maria-Romina Ivan, Tom Johnston, et le premier auteur ont introduit deux nouveaux paramètres de posets [1]. En plus d'être naturels, ces deux paramètres ont des applications directes à un problème largement étudié de saturation dans l'hypercube.

Définition 4 Soit un poset P , la cube-height de P (denotée $hh(P)$) est définie par le plus petit $h \in \mathbb{N}$ tel que P est un sous poset induit des h premiers niveaux de l'hypercube infini : $(\{A : A \subseteq \mathbb{N}, |A| \leq h\}, \subseteq)$.

Définition 5 Soit un poset P , la cube-width de P (denotée $hw(P)$) est définie par le plus petit $w \in \mathbb{N}$ tel que P est un sous poset induit des $hh(P)$ premiers niveaux de l'hypercube de dimension w : $(\{A : A \subseteq [w], |A| \leq hh(P)\}, \subseteq)$.

Théorème 6 Pour tout poset P , $hw(P) \leq |P|$.

Théorème 6 prouve une conjecture posée dans [1] et améliore la meilleure borne universelle connue sur le *saturation number* de P , voir [1] pour une définition formelle de la fonction sat^* .

Corollaire 7 Pour tout poset P , $\text{sat}^*(n, P) = O(n^{|P|})$.

Références

- [1] P. Bastide, C. Groenland, M-R Ivan, T. Johnston, *A polynomial upper bound for poset saturation*, European Journal of Combinatorics, 2024

Certification locale de graphes excluant un sous-graphe induit

Nicolas Bousquet, LIRIS, Université Lyon 1, CNRS `nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr`

Linda Cook, Discrete Mathematics Group, Institute for Basic Science (IBS), Republic of Korea `cookjlinda@gmail.com`

Laurent Feuilloley, LIRIS, Université Lyon 1, CNRS `laurent.feuilloy@univ-lyon1.fr`

Théo Pierron, LIRIS, Université Lyon 1, CNRS `theo.pierron@univ-lyon1.fr`

Sébastien Zeitoun, LIRIS, Université Lyon 1 `sebastien.zeitoun@univ-lyon1.fr`

La certification locale consiste à donner des informations (appelés *certificats*) aux sommets d'un graphe pour les aider à décider d'une propriété (globale) de ce graphe. Pour prendre sa décision, chaque sommet ne dispose que d'une vue locale, qui consiste en son voisinage à un rayon fixé, ainsi que les certificats des sommets dans ce voisinage. On dit qu'un graphe est *globalement accepté* avec une certaine assignation de certificats lorsque chaque sommet accepte.

Nous nous intéressons à la quantité minimale d'informations permettant de certifier une propriété donnée. Pour une propriété \mathcal{P} , on dit qu'il existe une certification locale de taille s pour certifier \mathcal{P} (où s est généralement une fonction de n , le nombre de sommets du graphe) si la propriété suivante est vérifiée : un graphe G vérifie \mathcal{P} si et seulement s'il existe une assignation de certificats aux sommets de G dans $\{0, \dots, 2^s - 1\}$ tel que G soit accepté.

Si H est un graphe, on dit que G admet H comme sous-graphe induit si on peut obtenir H à partir de G en supprimant des sommets, et sinon on dit que G est H -free. Intuitivement, pour un certain graphe H fixé, il est plus facile de certifier que G admet H comme sous-graphe induit que de certifier que G est H -free : en effet, pour certifier que G admet H comme sous-graphe induit, l'idée est d'indiquer aux sommets de G lesquels forment une copie de H . Ici, la propriété \mathcal{P} à laquelle nous nous intéressons est donc la propriété d'être H -free.

Nous étudions particulièrement le cas où H est un chemin, et nous montrons plusieurs bornes inférieures et supérieures sur la taille des certificats, dépendant du nombre de sommets de H et de la distance de vérification des sommets.

Long induced paths and forbiddent ordered subgraphs

Julien Duron, LIP, ENS de Lyon, julien.duron@ens-lyon.fr

Louis Esperet, G-SCOP, Univeristé Grenoble Alpes, louis.esperet@grenoble-inp.fr

Jean-Florent Raymond, LIP, ENS de Lyon, jean-florent.raymond@cnrs.fr

Consider a graph G with a path P of order n . What conditions force G to also have a long *induced* path? As complete bipartite graphs have long paths but no long induced paths, a natural restriction is to forbid some fixed complete bipartite graph $K_{t,t}$ as a subgraph. In this case we show that G has an induced path of order $\Omega((\log \log n)^{1/7-o(1)})$. This is an exponential improvement over a result of Galvin, Rival, and Sands (1982) and comes close to a recent upper bound of order $O((\log \log n)^2)$.

Another way to approach this problem is by viewing G as an ordered graph (where the vertices are ordered according to their position on the path P). From this point of view it is most natural to consider which ordered subgraphs need to be forbidden in order to force the existence of long induced path. Using this approach we improve or recover a number of existing results with much simpler proofs, in a unified way. We also show that if some forbidden subgraph forces the existence of a long induced path in G , then this induced path has size at least $\Omega((\log \log \log n)^{1/3})$, and is monotone with respect to P .

Algorithmes distribués et dimension asymptotique

Marthe Bonamy, CNRS, LaBRI, U. Bordeaux, marthe.bonamy@u-bordeaux.fr

Cyril Gavoille, LaBRI, U. Bordeaux, gavoille@labri.fr

Timothé Picavet, LaBRI, U. Bordeaux, timothe.picavet@u-bordeaux.fr

Alexandra Wesolek, TU Berlin, agwesole@sfu.ca

Le modèle LOCAL est un paradigme de calcul distribué où chaque sommet est un ordinateur doté d'une puissance de calcul infinie, et où la communication se déroule de manière synchrone – chaque ronde, chaque sommet communique simultanément avec ses voisins dans le graphe. Notre objectif principal est de résoudre le problème de l'*Ensemble Dominant Minimum* (MDS) dans le modèle LOCAL avec un nombre borné de rondes r . De manière équivalente, chaque sommet doit décider s'il appartient à un MDS, en connaissant seulement le graphe jusqu'à une distance de r .

Dans les graphes généraux, aucune approximation à facteur constant et nombre constant de rondes n'existe [1]. Nous étudions donc des classes de graphes plus restreintes. Il a été montré que MDS peut être approximé en un nombre constant de rondes sur les classes de graphes à expansion bornée [2], mais le facteur d'approximation est exponentiel en fonction de l'expansion, ce qui n'est sans doute pas optimal. Nous visons donc des facteurs d'approximation plus fins. Pour les graphes planaires-externes, il est déjà connu [3] que le facteur d'approximation optimal est 5. Nous présentons la généralisation suivante :

Théorème 8 *Sur les familles de graphes sans le mineur $K_{2,t}$, il existe une $\mathcal{O}(1)$ -approximation (où la constante est indépendante de t) de MDS dans le modèle LOCAL, en $\mathcal{O}_t(1)$ rondes.*

À ces fins, nous utilisons des nouveaux concepts structuraux basés sur la dimension asymptotique bornée des classes de graphes à mineurs exclus.

Références

- [1] F. Kuhn, T. Moscibroda et R. Wattenhofer, *Local Computation : Lower and Upper Bounds*, J. ACM **63(2)** (2016)
- [2] S. Kublenz, S. Siebertz et A. Vigny, *Constant round distributed domination on graph classes with bounded expansion*, SIROCCO 2021
- [3] M. Bonamy, L. Cook, C. Groenland, et A. Wesolek. *A Tight Local Algorithm for the Minimum Dominating Set Problem in Outerplanar Graphs*, DISC 2021

Colorations de type Brooks en temps linéaire

Daniel Gonçalves, CNRS, LIRMM, U. Montpellier daniel.goncalves@lirmm.fr

Lucas Picasarri-Arrieta, NII, Japan lucaspicasarri@gmail.com

Amadeus Reinald, LIRMM, U. Montpellier amadeus.reinald@lirmm.fr

Le théorème de Brooks, datant de 1941, est un résultat fondamental sur la coloration de graphes, énonçant que le nombre chromatique d'un graphe est presque toujours borné par son degré maximal. Lovász a montré en 1975 que, lorsqu'une telle coloration existe, elle peut être produite en temps linéaire.

Depuis, de nombreuses variantes de coloration de (di)graphes ont été introduites, et presque autant d'analogues du théorème de Brooks ont été montrés pour ces notions. Une des colorations les plus générales pour lesquelles un tel analogue a été obtenu est due à Bang-Jensen, Schweser et Stiebitz [1]. Etant donné un digraphe D et un vecteur de fonctions $f = f_1, \dots, f_p$, on veut colorer les sommets avec p couleurs tel que la couleur i soit " f_i -dégénérée". Alors, l'analogue du théorème de Brooks est le suivant :

Théorème 9 (B-J,S,S '20) *Soit D un digraphe connecté, et f tel que $f_1(v) + \dots + f_p(v) \geq \max(d^+(v), d^-(v))$ pour tout $v \in V(D)$. Alors, D est f -partitionnable ssi (D, F) n'est pas une "hard pair"¹.*

Pour cette notion et d'autres moins générales, un algorithme polynomial existe pour décider de l'existence de la coloration, et pour la produire.

Nous généralisons cette notion par le concept de F -dicoloration, à travers un nouveau paramètre de digraphes appelé bidégénérescence. Nous montrons un analogue du théorème de Brooks correspondant, en caractérisant les "hard pair" pour cette notion. Enfin, nous montrons un algorithme linéaire décidant si une instance est F -dicolorable, et produisant la coloration. De cette manière, cet algorithme est aussi capable de produire les colorations des notions que nous généralisons de manière unifiée, et en temps linéaire. Ces travaux apparaissent dans [2].

Références

- [1] J. Bang-Jensen, T. Schweser, M. Stiebitz, *Digraphs and variable degeneracy*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **36(1)** (2022)
- [2] D. Gonçalves, L. Picasarri-Arrieta, A. Reinald, *Brooks-type colourings of digraphs in linear time*, arXiv : **2405.05222**

1. Les hard pairs sont des instances construites inductivement explicitées dans [1].

Des graphes sans triangle de grand nombre chromatique

Guillaume Aubian, IRIF, Université Paris-Cité, aubian@irif.fr

Un graphe à colorier, avec mille couleurs, ce n'est pas si donné, car dans notre malheur, quelques droles d'oiseaux, espèces peu communes, sortis de nos chapeaux, en demandent mille une.

**Quelles sont leurs sous-structures ? Leurs sous-graphes induits ?
Quelle est leur ossature ? Comment sont-ils construits ?**

Une simple tactique : voilà treize sommets. Liez-les, c'est basique : c'est un graphe complet. Son nombre chromatique, est le treiz' sus-nommé. Comme la taille de sa clique, nous voilà avancés...

Ceci est bien spécieux, et clairement pas smart, il fallait faire mieux, ce que fit Blanch' Descartes. Sa construction, bien chic, pourtant triangle-free, voit son nombr' chromatique, tendre vers l'infini.

Mon résultat[1] qu'ici je voudrais présenter, Descartes et Micielski, prétend les imiter, usant de bipartis, pourtant 2-colorables, a des traits assortis, des qualités semblables.

Références

- [1] Aubian, G. Computing the clique number of tournaments. (2024), <https://arxiv.org/abs/2401.07776>

Une famille docile de graphes sans triangle de nombre chromatique non borné

Quentin Chuet, LISN, Université Paris-Saclay
`quentin.chuet@universite-paris-saclay.fr`
Hugo Demaret, LISN, École Polytechnique
`hugo.demaret@polytechnique.edu`
Hoang La, LISN, Université Paris-Saclay
`hoang.la@universite-paris-saclay.fr`
François Pirot, LISN, Université Paris-Saclay
`francois.pirot@universite-paris-saclay.fr`
Édouard Bonnet, Univ. Lyon, ENS de Lyon, UCBL, CNRS, LIP, France
Romain Bourneuf, LaBRI, Université de Bordeaux, `romain.bourneuf@ens-lyon.fr`

Julien Duron, Univ. Lyon, ENS de Lyon, UCBL, CNRS, LIP, France
Colin Geniet, Discrete Mathematics Group, IBS, Daejeon, South Korea
Stéphan Thomassé, Univ. Lyon, ENS de Lyon, UCBL, CNRS, LIP, France
Nicolas Trotignon, Univ. Lyon, ENS de Lyon, UCBL, CNRS, LIP, France

Nous construisons une famille héréditaire de graphes sans triangles de nombre chromatique non borné, où tout graphe non trivial contient soit 2 jumeaux non adjacents, soit un séparateur de taille au plus 2. Cette construction apporte une réponse négative à une conjecture de Chudnovsky, Penev, Scott et Trotignon [1].

Cette classe est la clôture héréditaire d'une famille de graphes sans triangles G_1, G_2, \dots , appelés *twincuts*, tels que chaque G_k a nombre chromatique k . Nous étudions diverses propriétés de ces graphes, mettant en évidence leur complexité structurelle remarquablement faible.

Références

- [1] M. Chudnovsky, I. Penev, A. Scott, and N. Trotignon, *Substitution and χ -boundedness*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **103**(5) (2013), 567–586.

Coarse geometry of quasi-transitive graphs.

Louis Esperet, G-SCOP, CNRS Alpes louis.esperet@grenoble-inp.fr
Ugo Giocanti, Uniwersytet Jagielloński, ugo.giocanti@orange.fr

Coarse geometry consists in studying the large-scale structure of a space. A central concept is the notion of *quasi-isometry* : intuitively, two metric spaces are quasi-isometric to each other if their metrics are the same, up to a rescaling by some constant factor. In particular, notions from coarse geometry turn out to be particularly relevant when studying the geometric properties of finitely generated groups, as every two different Cayley graphs of a given finitely generated group are quasi-isometric to each other.

Recently, a new area of research emerged that aims at studying the interplay between coarse geometry and graph theory, called *Coarse graph theory*. In this talk, I will focus on *quasi-transitive* graphs, i.e., graphs which have only a finite number of vertices, up to the application of an automorphism. Intuitively, quasi-transitive graphs have to be thought as graphs with “many symmetries”, and this class of graphs is particularly interesting to study as it generalizes the class of vertex-transitive graphs and the class of Cayley graphs. In particular, we will see that every quasi-transitive locally finite graph which excludes a minor is quasi-isometric to some planar graph, and that every locally finite graph which is quasi-isometric to some planar graph is k -planar for some $k \in \mathbb{N}$. We will also discuss about a few other related recent questions and results.

This is joint work with Louis Esperet.

A simple quadratic kernel for Token Jumping on surfaces

Daniel W. Cranston, Department of Computer Science, Virginia Commonwealth University, dcranston@vcu.edu

Moritz Mühlenthaler, G-SCOP, Grenoble INP, moritz.muhlenthaler@grenoble-inp.fr

Benjamin Peyrille, G-SCOP, Univ. Grenoble Alpes, benjamin.peyrille@grenoble-inp.fr

The Independent Set Reconfiguration - Token Jumping (ISR-TJ) problem asks whether, given a graph G and two independent sets of *tokens* I and J of G , we can transform I into J by changing the position of a single token in each step and having an independent set of tokens throughout. We show that there is a polynomial-time algorithm that, given an instance of ISR-TJ, computes an equivalent instance of size $O(g^2 + gk + k^2)$, where g is the genus of the input graph and k is the size of the independent sets. Our algorithm is very simple and does not require an embedding of the input graph.

Our approach, is inspired by a technique introduced by Takehiro et al. [1] and used in subsequent articles. The main idea is to partition the graph into four sets : the vertices of $I \cup J$, the vertices \mathcal{C}_1 that at most one neighbor in $I \cup J$, the vertices \mathcal{C}_2 that have exactly two neighbors in $I \cup J$ and the vertices \mathcal{C}_3 that have at least three neighbors in $I \cup J$. We can easily bound the size of \mathcal{C}_1 and \mathcal{C}_3 using Heawood's number and Euler's formula. We then exploit the structure of any drawing of G to reduce the size of \mathcal{C}_2 .

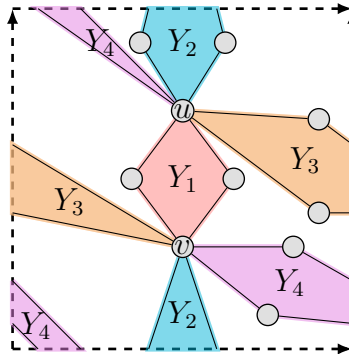


FIGURE 2 – Vertices of \mathcal{C}_2 adjacent to $Y = \{u, v\}$ on a torus ($g = 1$).

Références

- [1] Takehiro Ito, Marcin Jakub Kaminski, and Hirotaka Ono. *Fixed-parameter tractability of token jumping on planar graphs*, ISAAC 2014.

Reconfiguration de rubans : complexité et applications

Bousquet, N. Deschamps, Q. Mary, A. Mouwad, A. Pierron, T.
Bousquet LIRIS, Université Lyon 1 nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr
Deschamps LIRIS, Université Lyon 1 quentin.deschamps@univ-lyon1.fr
Mary LBBE, Université Lyon 1 arnaud.mary@univ-lyon1.fr
Mouwad American University of Beirut amer.mouawad@gmail.com
Pierron LIRIS, Université Lyon 1 theo.pierron@univ-lyon1.fr

Les problèmes de reconfiguration sont des problèmes de graphe dans lesquels le but est de passer d'une configuration à une autre par une succession d'étapes élémentaires de sorte à ce que toutes les configurations intermédiaires respectent une condition. Par exemple, pour la reconfiguration d'ensembles dominants, la contrainte est de conserver un ensemble dominant et une étape consiste à changer exactement un sommet de l'ensemble. Dans la version *token sliding*, il faut de plus que le sommet qui a été ajouté et celui qui a été supprimé soient adjacents. Pour étudier la complexité de ce problème, nous avons introduit un nouveau problème :

Reconfiguration de rubans : Soient Σ un alphabet, P_1, \dots, P_k des chemins dont les sommets sont étiquetés par un sous-ensemble (éventuellement vide) de l'alphabet. On considère qu'un jeton est posé sur le premier sommet de chaque chemin. A chaque étape il est possible de faire glisser un jeton d'un sommet sur un sommet adjacent. Une configuration est valide si chaque lettre de Σ est couverte par au moins un jeton. Le problème admet une solution si il est possible de passer de la configuration avec tous les jetons à une extrémité à celle où tous les jetons sont sur l'autre extrémité.

Plus précisément, nous avons introduit plusieurs problèmes de cette forme et prouvé des résultats de complexité entre eux. Ainsi, il est possible de réduire la version *token sliding* de la reconfiguration d'ensembles dominants à un problème de reconfiguration de rubans que l'on peut lui même réduire à une version quantifiée de SAT. Passer de façon intermédiaire par la reconfiguration de rubans permet de conserver des paramètres et ainsi de prouver des résultats en complexité paramétrée comme :

Théorème : *Token sliding dominating set reconfiguration* est PSPACE-complet et XL-complet paramétré par k plus *feedback vertex set number*, même restreint aux graphes 7-dégénérés de largeur arborescente au plus 12 et de largeur de chemin au plus 18.

Edge-recoloring with non-increasing potential

De Meyer Lucas, LIRIS, Université Lyon 1, lucas.de-meyer@univ-lyon1.fr

Kardoš František, LaBRI, Université Bordeaux 1, frantisek.kardos@u-bordeaux.fr

Lagoutte Aurélie, G-SCOP, Université de Grenoble, aurelie.lagoutte@grenoble-inp.fr

Perarnau Guillem, Departament de Matemàtica Aplicada, Universitat Politècnica de Catalunya, guillem.perarnau@upc.edu

Vizing's theorem states that the minimum number of colors required to properly color the edges of a graph, is either Δ or $\Delta + 1$. Specifically, Vizing proved that, from any proper k -edge-coloring with $k > \Delta + 1$, one can obtain a proper $(\Delta + 1)$ -edge-coloring of a graph using Kempe changes. This result provides an algorithm to sample a proper k -edge-coloring of a graph for $k \geq \Delta + 1$. Thus, it naturally raises the question of whether there is an efficient procedure to uniformly sample proper k -edge-colorings, for $k \geq \Delta + 1$.

Recently, Wang, Zhang, and Zhang [1] showed that Glauber dynamics is an efficient uniform sampler for proper k -edge-colorings when $k \geq (2 + o(1))\Delta$. However, their method is proven to be unable to break the 2Δ threshold.

In 2020, Dotan, Linial and Peled [1] proposed another algorithm to generate uniformly random proper $(2n - 1)$ -edge-colorings of the complete graph K_{2n} . A version of this algorithm consists in starting from an arbitrary edge-coloring (not necessarily proper) and successively recoloring randomly chosen edges if some predefined potential ϕ does not increase. Based on simulations, they conjectured that this random walk on the $(2n - 1)$ -edge-colourings of K_{2n} almost surely reaches a proper edge-coloring, and that it does so in $\tilde{O}(n^4)$ steps.

In this talk, we will prove that for $k \geq \Delta + 1$, there is always a reconfiguration sequence from any k -edge-coloring to some proper k -edge-coloring that does not increase the potential ϕ .

Références

- [1] Yulin Wang, Chihao Zhang, and Zihan Zhang. *Sampling Proper Colorings on Line Graphs Using $(1 + o(1))\Delta$ Colors*. arXiv preprint arXiv :2307.08080, 2024.
- [2] Dotan, M. and Linial, N. and Peled, Y., *Efficient, local and symmetric Markov chains that generate one-factorizations*, Acta Math. Hungar **161** (2020), 557–568.

Le problème de la plus courte exploration dans les graphes temporels.

Antoine Toullalan, Éric Sanlaville, Stefan Balev, LITIS, Université du Havre, `prenom.nom@univ-lehavre.fr`

Un graphe temporel est un graphe dans lequel les arêtes peuvent apparaître ou disparaître au cours du temps. Nous étudions les graphes temporels tels qu'à chaque pas de temps le graphe est non orienté et connexe, on suppose que traverser une arête nécessite un pas de temps. Un trajet est un chemin composé d'arêtes successives dans le temps, on appelle une exploration un trajet visitant tout les sommets du graphe.

Michail et Spirakis [1] ont démontré que pour ce type de graphe temporel il existe toujours une exploration en $O(n^2)$ pas de temps traversant $O(n^2)$ arêtes quel que soit le sommet de départ. Et Erlebach et al. [2] ont démontré qu'il existe une famille de graphes temporels telle que toute exploration nécessite $\Omega(n^2)$ pas de temps.

Nous étudions le problème de l'exploration dans les graphes temporels en cherchant à minimiser le nombre d'arêtes traversées pour un temps de vie du graphe L fixé (le "Shortest Temporal EXploration Problem" ou STEXP).

Nous avons étudié le STEXP dans le cas où l'union des arêtes du graphe est un cycle, l'exploration nécessite alors un nombre linéaire de pas de temps [1, 3]. Soit la famille de graphes temporels constamment connexes tels qu'à chaque pas de temps le graphe à un diamètre borné par le paramètre k , nous avons démontré qu'il existe une exploration en $O(kn^2)$ pas de temps et traversant $O(kn)$ arêtes. Enfin nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème 10 *Soit \mathcal{G} un graphe temporel constamment connexe et un sommet de départ s . Il existe une exploration débutant en s traversant $O(n^{1.5})$ arêtes en $O(n^{3.5})$ pas de temps.*

Références

- [1] MICHAÏL, Othon et SPIRAKIS, Paul G. Traveling salesman problems in temporal graphs. Theoretical Computer Science, 2016, vol. 634, p. 1-23.
- [2] ERLEBACH, Thomas, HOFFMANN, Michael, et KAMMER, Frank. On temporal graph exploration. Journal of Computer and System Sciences, 2021, vol. 119, p. 1-18.
- [3] ILCINKAS, David et WADE, Ahmed M. Exploration of the t-interval-connected dynamic graphs : the case of the ring. Theory of Computing Systems, 2018, vol. 62, p. 1144-1160.

À la recherche de l'arbre perdu : difficulté et généralisation de l'arbre couvrant dans les graphes temporels

Arnaud Casteigts, LaBRI, Bordeaux, arnaud.casteigts@labri.fr
Timothée Corsini, LaBRI, Bordeaux, timothee.corsini@labri.fr

Un *graphe temporel* est un graphe dont les arêtes ne sont pas toujours disponibles, leur présence dépend du temps. Un tel graphe est *temporellement connexe* si tous ses sommets peuvent se joindre mutuellement via des chemins qui traversent les arêtes en temps croissant, ces chemins temporels sont appelés *trajets*. Une des caractéristiques liées aux trajets est la relation d'accessibilité entre les sommets qui n'est ni symétrique, ni transitive, générant de nombreux problèmes structurels et algorithmiques. Par exemple, comme illustré en Figure 3, un graphe temporellement connexe n'admet pas nécessairement d'arbre couvrant temporellement connexe.

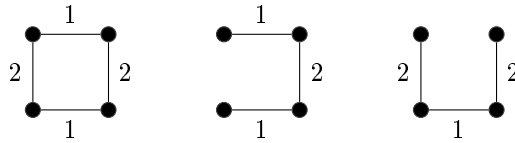


FIGURE 3 – Un graphe temporellement connexe dont les sous-graphes couvrants ne le sont pas.

Dans cette présentation, nous nous penchons sur les raisons derrière l'absence de l'arbre couvrant. Nous montrons dans un premier temps que décider s'il existe un arbre couvrant temporellement connexe est un problème NP-complet. Par la suite, nous nous penchons sur une généralisation du problème de l'arbre couvrant. En effet, un arbre temporellement connexe impose que les trajets entre chaque paire de sommets passent par les mêmes arêtes dans les deux sens, propriété qui n'est pas toujours présente dans les graphes temporellement connexes. Nous définissons alors la notion de *chemins bidirectionnels*, à savoir des séquences d'arêtes correspondant à un trajet dans chaque direction. Cette notion de chemin permet de définir des *bi-spanneurs* : des structures dont chaque paire de sommets partage un chemin bidirectionnel. Nous montrons que décider s'il existe un bi-spanneur dans un graphe temporel se fait en temps polynomial. Toutefois, à l'instar des spanneurs temporels, trouver la taille optimale d'un bi-spanneur est NP-difficile, même dans les graphes temporels simples.

Comment rendre un graphe temporel connecté ?

T. Bellitto, LIP6, Sorbonne Université, thomas.bellitto@lip6.fr

J. Bouton Popper, LIP6, Sorbonne Université, jules.bouton-popper@lip6.fr

B. Escoffier, LIP6, Sorbonne Université, bruno.escoffier@lip6.fr

Ce travail porte sur des problèmes de connexité dans les graphes temporels. Dans ce type de graphes, les arêtes évoluent au cours du temps. Formellement, G est assorti d'une fonction λ qui assigne aux arêtes l'ensemble des pas de temps auxquels elles sont actives. On s'y déplace comme dans les graphes usuels, mais en respectant une contrainte de temps : un chemin temporel respecte un ordre chronologique sur les arêtes qu'il traverse. Cet ordre peut être strict ou non-strict. Enfin, la notion familière de connexité se décline naturellement dans les graphes temporels : un graphe est connexe dans le temps si entre chaque paire ordonnée de sommets, il existe un chemin temporel. Nous avons ainsi les notions de connexité stricte et non-strictes, selon la contrainte imposée sur les chemins.

Dans les graphes temporels, nous nous sommes intéressés au problème Temporal Connectivity Augmentation (TCA), qui consiste à trouver parmi un ensemble d'arêtes temporelles que l'on peut ajouter au graphe, un sous-ensemble de cardinalité minimale qui rend le graphe connexe. L'approche est inverse à celle des spanners temporels, pour lesquels on cherche le plus petit sous-graphe connexe dans un graphe déjà connecté.

Notre étude porte sur la complexité de TCA dans sa version stricte et non-strictes, mais également sur de multiples variantes et problèmes liés. Dans un premier temps, nous démontrons que TCA strict et TCA non-strict sont NP-complets, et ce, pour toute durée de vie du graphe supérieur ou égale à 2. En revanche, nous identifions une variante du problème, désignée par 1,2-TCA, qui est résoluble en temps polynomial, dans le cas non-strict. Dans un second temps, nous étendons notre recherche à des notions de connexité plus faibles. Nous avons étudié le problème d'augmentation consistant à rendre un sommet source du graphe, problème que nous avons montré également NP-difficile.

Enfin, dans le cas plus général où l'on a une liste de paires de sommets qui doivent être connectés, si le nombre de paires dans la liste est fixé, nous montrons que l'on résout le problème d'augmentation en temps polynomial.

The Parameterized Complexity of Local Search for MTSP

Julien Baste, CRIStAL, Universite de Lille, julien.baste@univ-lille.fr
Laetitia Jourdan, CRIStAL, Universite de Lille, laetitia.jourdan@univ-lille.fr
Marie-Eléonore Kessaci, CRIStAL, Universite de Lille, mkessaci@univ-lille.fr
Narges Tavassoli, CRIStAL, Universite de Lille, narges.tavassoli-kejani@univ-lille.fr
Marie-Emilie Voge, CRIStAL, Universite de Lille, marie-emilie.voge@univ-lille.fr

This research aims to connect two important areas : parameterized complexity and multi-objective optimization. Parameterized complexity is a way of studying how efficiently an algorithm can solve a problem by focusing on given parameters, while multi-objective optimization focuses on real-world problems that have several goals to achieve at once. The Multi-Objective Traveling Salesman Problem (MTSP) is a variation of the Traveling Salesman Problem (TSP) where a salesman must visit a set of cities and return to the starting point, but instead of optimizing just one objective (like minimizing distance), there are multiple objectives to consider simultaneously. These objectives could be things like minimizing total cost, distance, or travel time, while also considering factors like fuel consumption or safety. We aim to solve MTSP using a local search method. To enhance the effectiveness of this approach, we have proposed a new neighborhood operator, which is defined as follows :

Local MTSP(r -swap)

Input : An H-ordered graph $G = (V, E)$, two edge weight functions w_1, w_2 with maximum weight \mathcal{W} , and a positive integer k .

Question : Is there an ordered sequence of r -swaps S of size at most k such that $\text{perm}(S)$ is an improved Hamiltonian cycle ?

Parameters : r , k and \mathcal{W} .

This neighborhood operator is inspired by single objective one [1]. We show that even with multiple objectives, the problem can still be solved in FPT time, specifically in time $O(k^2 \cdot k! \cdot r^{2k} \cdot n + k^3 \cdot r \cdot \mathcal{W}^2 \cdot n^2)$.

Références

- [1] J. Guo, S. Hartung, R. Niedermeier, and O. Suchý, *The Parameterized Complexity of Local Search for TSP, More Refined*, *Algorithmica* **67(1)** (2012), 89–110.

Détection de mineurs induits en temps polynomial

Clément Dallard, Université de Fribourg, Suisse

Maël Dumas, University of Warsaw, Pologne

Claire Hilaire, FAMNIT, University of Primorska, Slovénie

Anthony Perez, LIFO, Université d'Orléans

Le problème H -INDUCED MINOR CONTAINMENT (IMCH) consiste à décider si un graphe fixé H est un mineur induit d'un graphe G donné en entrée, c'est-à-dire, de savoir si H peut être obtenu à partir de G en supprimant des sommets et en contractant des arêtes. Nous connaissons plusieurs graphes H pour lesquels IMCH est NP-complet, même lorsque H est un arbre. Le problème peut être résolu en temps polynomial pour certains petits H [1] ou bien si H a une structure simple, par exemple une étoile [2]. La complexité du problème reste cependant ouverte pour la plupart des graphes H . Nous étudions quelles conditions sur H et G sont suffisantes pour que le problème puisse être décidé en temps polynomial. Nos résultats identifient plusieurs classes infinies de graphes tels que, si H appartient à l'une de ces classes, alors IMCH peut être résolu en temps polynomial. Une conséquence des résultats présentés ici, est que IMCH peut être décidé en temps polynomial pour tous les graphes H avec au plus 5 sommets, à l'exception de trois cas ouverts.

Références

- [1] C. Dallard, M. Dumas, C. Hilaire, M. Milanič, A. Perez, N. Trotignon, *Detecting $K_{2,3}$ as an Induced Minor*, IWOCA 2024, https://doi.org/10.1007/978-3-031-63021-7_12.
- [2] J. Fiala, M. Kamiński, D. Paulusma, *Detecting induced star-like minors in polynomial time*, Journal of Discrete Algorithms, vol. 17, pp. 74–85, 2012. <https://doi.org/10.1016/J.JDA.2012.11.002>

A parameterized point of view on forming small coalitions

Foivos Fioravantes, G²OAT, Czech Technical University in Prague, ffioravantes@gmail.com
Harmender Gahlawat, GSCOP, Grenoble-INP, harmendergahlawat@gmail.com
Nikolaos Melissinos, G²OAT, Czech Technical University in Prague, nik.melissinos@gmail.com

Imagine we want to split a group of agents into teams in the most *efficient* way, considering that each agent has their own preferences about their teammates (assuming these preferences are symmetric). This scenario is modeled by the extensively studied COALITION FORMATION problem. Here we study a version of this problem where each team must additionally be of bounded size.

Formally, we are given an edge-weighted graph G and an integer \mathcal{C} , and are tasked with deleting edges from G so that each remaining connected component is of order at most \mathcal{C} and the sum of the weights of the remaining edges is as big as possible. We conduct a systematic algorithmic study, providing several intractability results as well as multiple exact algorithms that scale well as the input grows (FPT).

Among our positive results, we provide an FPT algorithm parameterized by vc , the vertex cover number of the input graph G . We also provide a polynomial kernel parameterized by vc in the case where all weights are set to one. This raises the question about the existence of a similar result for the case where the edge-weights are arbitrary. We answer negatively to this question, proving that there can be no polynomial kernel parameterized by $vc + \mathcal{C}$ for this case, unless the polynomial hierarchy collapses.

A report of this work can be found in [1].

Références

- [1] Foivos Fioravantes, Harmender Gahlawat, Nikolaos Melissinos. *A parameterized point of view on forming small coalitions* (2024). ⟨hal-04562753⟩

Sur la complexité de l'ensemble Indépendant Dominant avec des Obligations faibles dans les graphes

Timothée Martinod, LIFO, Université d'Orléans,
timothee.martinod@univ-orleans.fr

Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble *dominant indépendant* d'un graphe $G = (V, E)$ si D est un ensemble indépendant (il n'existe aucune arête entre les sommets de D) et dominant tous les sommets de G (chaque sommet de $V - D$ a un voisin dans D). Le problème de l'ensemble Indépendant Dominant avec Obligations faibles (IDOf) en propose une généralisation. Une instance de notre problème est un graphe G , des obligations $\Pi = (V_1, \dots, V_k)$ sur les sommets de V et un seuil $\kappa \geq 0$. Lorsque $\kappa > 0$, les obligations sont dites *faibles*. Un ensemble Indépendant Dominant avec Obligations faibles (IDOf) D dans une instance (G, Π, κ) est un ensemble dominant indépendant avec une contrainte supplémentaire : si *plus de* κ sommets d'une obligation V_i appartiennent à D , alors tous les autres sommets de V_i doivent aussi appartenir à D : pour chaque $i = 1, \dots, k$, soit $|V_i \cap D| \leq \kappa$ soit $V_i \subseteq D$ (l'ensemble D *respecte* les obligations faibles Π). Le problème de décider si une instance (G, Π, κ) contient un IDOf sera nommé *problème IDOf*. Le problème IDOf généralise les obligations telles que définies dans [1].

Soit λ la taille de la plus grande obligation. Nous montrons que lorsque $\kappa = \lambda - 1$ le problème IDOf est polynomial quelle que soit la topologie du graphe. S'il existe une constante λ telle que pour chaque $i = 1, \dots, k$, $|V_i| = \lambda$ alors nous disons que les obligations sont λ -équilibrées. Nous montrons que le problème IDOf est NP-complet dans différents cas, selon la topologie du graphe, le seuil choisi et la présence d'obligations fortes. La plupart des problèmes algorithmiques sont triviaux ou faciles à résoudre dans les chemins et les arbres. Cependant, nous montrons que si l'instance contient des obligations fortes alors le problème IDOf est NP-complet, même si G est un chemin pour toute répartition des obligations λ -équilibrées faibles et fortes. Dans le cas où toutes les obligations sont faibles, nous montrons que le problème IDOf est NP-complet pour tout seuil $\kappa \geq 1$ dans les collections de chemins avec des obligations λ -équilibrées et dans les arbres.

Références

- [1] C. Laforest and T. Martinod, *On the complexity of independent dominating set with obligations in graphs*, Theoretical Computer Science (2022), 1–14.

A finite presentation of graphs of treewidth at most three and associated connectivity decompositions

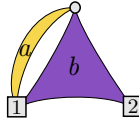
Amina Doumane, LIP, ENS de Lyon, amina.doumane@ens-lyon.fr
Samuel Humeau, LIP, ENS de Lyon, samuel.humeau@ens-lyon.fr
Damien Pous, LIP, ENS de Lyon, damien.pous@ens-lyon.fr

We have recently shown the existence of a finite equational presentation of graphs of treewidth at most three [1], solving an instance of an open problem by Courcelle and Engelfriet [2, p. 118].

We use a syntax generalising series-parallel expressions, denoting graphs with a small interface (squared vertices below) :

$$t, u ::= t \parallel u \mid \mathbf{1}t \mid \mathbf{f}t \mid pt \mid a \mid \emptyset$$

For example the term $\mathbf{f}(b \parallel (32)\mathbf{1}a)$ denotes the following graph :



We introduce appropriate notions of connectivity for such graphs (components, cutvertices, separation pairs). We use those concepts to analyse the structure of graphs of treewidth at most three, showing how they can be decomposed recursively, first canonically into connected parallel components, and then non-deterministically. The main difficulty consists in showing that all non-deterministic choices can be related using only finitely many equational axioms.

Références

- [1] A. Doumane, S. Humeau, and D. Pous, *A Finite Presentation of Graphs of Treewidth at Most Three*. In 51st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2024). Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), Volume 297, pp. 135 :1-135 :18, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik (2024) <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2024.135>
- [2] Bruno Courcelle and Joost Engelfriet *Graph Structure and Monadic Second-Order Logic - A Language-Theoretic Approach*, Encyclopedia of mathematics and its applications **138**, Cambridge University Press (2012).

Exclure une apex-forêt efficacement

Jędrzej Hodor, Jagiellonian University

Hoang La, Université Paris-Saclay

Piotr Micek, Jagiellonian University

Clément Rambaud, Université Côte d'Azur, `clement.rambaud@inria.fr`

Un graphe G a *layered pathwidth* au plus t s'il existe une path-decomposition (W_1, \dots, W_ℓ) et un layering $(L_i)_{i \geq 0}$ de G tel que $|W_x \cap L_i| \leq t$ pour tout $x \in [\ell]$ et $i \geq 0$. Nous montrons que pour toute apex-forêt X ayant au moins deux sommets, pour tout graphe G dont X n'est pas mineur, G a *layered pathwidth* au plus $2|V(X)| - 3$.

Ceci améliore un résultat de Dujmović, Eppstein, Joret, Morin et Wood [1]. Notre méthode repose sur une décomposition des graphes excluant une forêt en tant que mineur enraciné, et permet d'obtenir des résultats analogues pour la *treedepth* ou le *vertex cover number*.

Références

- [1] V. Dujmović, D. Eppstein, G. Joret, P. Morin, and D. Wood, *Minor-closed graph classes with bounded layered pathwidth*, SIAM J. Discrete Math., **34(3)** (2020), 1693–1709.
- [2] J. Hodor, H. La, P. Micek, and C. Rambaud, *Quickly excluding an apex-forest*, `arXiv:2404.17306`.

Structure of twin-width 1 graphs

Jungho Ahn, KIAS, junghoahn@kias.re.kr

Hugo Jacob, LIRMM, Université de Montpellier, hugo.jacob@lirmm.fr

Noleen Köhler, University of Leeds, scnk@leeds.ac.uk

Christophe Paul, LIRMM, Université de Montpellier, christophe.paul@lirmm.fr

Amadeus Reinald, LIRMM, Université de Montpellier, amadeus.reinald@lirmm.fr

Sebastian Wiederrecht, KAIST, sebastian.wiederrecht@gmail.com

The graph parameter twin-width was introduced by Bonnet, Kim, Thomassé, and Watrigant [2], it generalizes a previous result on permutations with forbidden patterns due to Guillemot and Marx [3] to the setting of graphs. Most notably, graphs with bounded twin-width have linear time model-checking for first order formulae, assuming a certificate of the bound on twin-width is given. Obtaining such a certificate efficiently is however still open.

In this direction, one may try to get some intuition from small values of twin-width. The graphs of twin-width 0 are well-known : they are exactly the class of cographs. A polynomial algorithm for recognizing graphs of twin-width 1 was obtained in [1].

Thanks to a more detailed analysis on the structure of graphs that have twin-width at most 1, we obtain a linear time recognition algorithm and a decomposition theorem.

Références

- [1] É. Bonnet, E. J. Kim, A. Reinald, S. Thomassé, and R. Watrigant. Twin-width and polynomial kernels. In P. A. Golovach and M. Zehavi, editors, *16th International Symposium on Parameterized and Exact Computation, IPEC 2021, September 8-10, 2021, Lisbon, Portugal*.
- [2] É. Bonnet, E. J. Kim, S. Thomassé, and R. Watrigant. Twin-width I : tractable FO model checking. *J. ACM*, 2022.
- [3] S. Guillemot and D. Marx. Finding small patterns in permutations in linear time. In C. Chekuri, editor, *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2014, Portland, Oregon, USA, January 5-7, 2014*.

Complexité des jeux Waiter-Client

Valentin Gledel, LAMA, Univ. Savoie Mont Blanc, valentin.gledel@univ-smb.fr
Nacim Oijid, LaBRI, Univ. de Bordeaux, nacim.oijid@u-bordeaux.fr
Sébastien Tavenas, LAMA, Univ. Savoie Mont Blanc, sebastien.tavenas@univ-smb.fr
Stéphan Thomassé, LIP, ENS de Lyon, stephan.thomasse@ens-lyon.fr

Les jeux positionnels ont été introduits par Hales et Jewett en 1963, et leur étude s'est intensifiée après les premiers résultats d'Erdős et Selfridge, qui ont montré en 1973 leur connexion avec la théorie de Ramsey et la coloration d'hypergraphes. Différentes conventions de jeux existent, et la plus populaire, le jeu Maker-Breaker, fait intervenir deux joueurs, Maker et Breaker, qui choisissent à tour de rôle un sommet d'un hypergraphe jusqu'à ce que tous les sommets soient choisis. Maker l'emporte si elle parvient à compléter une hyperarête, sinon c'est Breaker qui gagne. Cette convention a été prouvée PSPACE-complète par Schaefer en 1978. L'étude de la complexité des jeux positionnels s'est ensuite ralentie jusqu'à un regain d'intérêt récent pour ce domaine. En 2017, Bonnet, Jamain et Saffidine ont prouvé que les jeux Maker-Breaker étaient $W[1]$ -durs, paramétrés par le nombre de coups accordés à Maker pour gagner. En 2021, Rahman et Watson ont amélioré le résultat connu de PSPACE-difficulté en montrant qu'il était possible de se restreindre aux hypergraphes de rang 6, et en 2024, Galliot, Gravier et Sivignon ont prouvé que le gagnant pouvait être déterminé en temps polynomial si l'hypergraphe était de rang 3.

Nous nous intéressons ici à l'étude de la convention Waiter-Client, introduite par Beck en 2002 sous le nom de "Picker-Chooser", dans le but de mieux comprendre les jeux Maker-Breaker. Dans cette convention, Waiter choisit deux sommets libres de l'hypergraphe et les présente à Client, qui choisit l'un des deux sommets à prendre, laissant le second à Waiter. Waiter l'emporte si elle parvient à obtenir tous les sommets d'une hyperarête, sinon Client gagne. Cette convention a été prouvée NP-difficile par Csernenszky, Martin et Pluhar en 2011, mais aucun résultat positif ni aucun résultat de complétude n'étaient connus jusqu'à présent. Nous proposons ici un algorithme FPT, paramétré par le rang de l'hypergraphe, pour déterminer le gagnant de ces jeux, prouvant ainsi que le calcul du gagnant est polynomial sur les hypergraphes de rang borné.

Résolution du P_5 -game sur les forêts

Eric Duchêne, LIRIS, Université Lyon 1, eric.duchene@univ-lyon1.fr
[Arthur Dumas](mailto:arthur.dumas@univ-lyon1.fr), LIRIS, Université Lyon 1, arthur.dumas@univ-lyon1.fr
Mathieu Hilaire, LIRIS, Université Lyon 1, mathieu.hilaire@univ-lyon1.fr
Aline Parreau, CNRS, LIRIS, Université Lyon 1, aline.parreau@univ-lyon1.fr

Les jeux positionnels sont des jeux à deux joueurs sur les hypergraphes qui ont été introduits par Erdős et Selfridge en 1973 [1]. Au sein de cette famille, le H -game, dans sa version Maker-Breaker, se joue à partir d'un graphe G et d'un graphe cible H . En commençant par Maker, les joueurs sélectionnent chacun leur tour une arête libre de G . Maker gagne si elle réussit à sélectionner un ensemble d'arêtes qui contient une copie de H et Breaker gagne si Maker échoue. Dans les jeux positionnels Maker-Breaker, il existe forcément une stratégie gagnante pour exactement l'un des deux joueurs. L'objectif est alors de résoudre le problème qui prend en entrée deux graphes G et H et donne le gagnant du H -game sur G , puis éventuellement d'explicitier une stratégie gagnante.

Récemment, Galliot [2] a présenté un résultat général sur les jeux positionnels Maker-Breaker, dont une conséquence est la résolution en temps polynomial du H -game lorsque H est graphe ayant trois arêtes ou moins. Lorsque H est un graphe à quatre arêtes, il a été démontré dans [3], que le $K_{1,4}$ -game joué sur les forêts est polynomial. Notre travail s'inscrit dans la lignée de ce résultat, en étudiant le cas où H est une chaîne avec quatre arêtes (i.e. un P_5) et G une forêt.

Théorème 11 *Il existe un algorithme calculant l'issue du P_5 -game sur une forêt F , en temps linéaire en la taille de F .*

Nous donnons par ailleurs une stratégie gagnante explicite pour le vainqueur.

Références

- [1] Paul Erdős et John Lewis Selfridge. [On a combinatorial game](#). *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 14(3):298–301, 1973
- [2] Florian Galliot. [Hypergraphes et jeu Maker-Breaker: une approche structurelle](#), *Computer Science and Game Theory*. Université Grenoble Alpes, 2023.

- [3] E. Duchene, V. Gledel, F. Mc Inerney, N. Nisse, N. Oijid, A. Parreau, et M. Stojaković, *Complexity of maker-breaker games on edge sets of graphs*, arXiv preprint arXiv:2302.10972, 2023

Jeux positionnels en convention Maker-Maker généralisée

Jonas Sénizergues, LaBRI, Université de Bordeaux, jonas.senizergues@u-bordeaux.fr
Florian Galliot, I2M, Université d'Aix-Marseille, florian.galliot@univ-amu.fr

Un jeu positionnel est un jeu combinatoire à deux joueurs se jouant sur un sur des hypergraphes, où chaque joueur sélectionne alternativement des sommets un par un. L'ensemble des (hyper-)arêtes représente des objectifs pour un des deux joueurs ou les deux, selon les conventions. Par exemple, pour la convention Maker-Maker, les arêtes sont les ensembles gagnants pour les deux joueurs. Nous définissons ici la généralisation de ce principe au cas où les deux joueurs possèdent des ensemble gagnants pas forcément identiques. Nous étudions alors la complexité algorithmique de la décision de l'issue d'un jeu positionnel sous cette convention Maker-Maker généralisée selon les tailles des arêtes des joueurs, et les liens avec les conventions classiques.

Profondeur d'élimination : une généralisation de la profondeur arborescente

Thomas Delépine, LISN, Université Paris-Saclay,
`thomas.delepine@live.fr`

Hoang La, LISN, Université Paris-Saclay,
`hoang.la@universite-paris-saclay.fr`

François Pirot, LISN, Université Paris-Saclay,
`francois.piroto@universite-paris-saclay.fr`

Considérons le jeu suivant sur un graphe. À chaque tour, le joueur peut enlever un sommet de chaque composante connexe du graphe courant. Le but du jeu est d'éliminer tous les sommets du graphe. Le nombre minimum de tours nécessaires est appelé la profondeur arborescente (treedepth [1]) du graphe. C'est un paramètre structural bien étudié et souvent utilisé dans des problèmes algorithmiques.

Dans cet exposé, nous allons introduire un nouveau paramètre appelé la profondeur d'élimination (elimination depth), une généralisation de la profondeur arborescente. Au lieu d'éliminer un sommet par composante connexe, nous autorisons l'élimination de sous-graphes induits connexes plus complexes (chemins, arbres, graphes planaires, ...).

Nous étudions les valeurs extrémales de la profondeur d'élimination en fonction des graphes que nous cherchons à éliminer et des sous-graphes connexes que nous pouvons enlever. Nous soulignons un résultat surprenant pour de nombreuses classes connues : s'il existe un graphe que nous ne pouvons pas éliminer en un tour alors il en existe que nous ne pouvons pas éliminer en moins qu'un nombre logarithmique (en la taille du graphe) de tours. Nous montrons aussi que cette borne inférieure peut être atteinte dans plusieurs cas, par exemple quand nous éliminons des cycles dans les graphes planaires.

Références

- [1] J. Nešetřil and P. Ossona De Mendez, *Sparsity : graphs, structures, and algorithms*, Springer Science & Business Media **28** (2012).

Une amélioration du théorème de structure de produit pour les graphes excluant un arbre donné comme mineur

Quentin Claus, Université libre de Bruxelles, quentin.claus@ulb.be

La théorie de structure de produit est une branche en pleine expansion de la théorie des graphes. Son but est, étant donné une certaine notion de produit (le produit fort \boxtimes), de montrer que, pour certaines classes de graphes difficiles à appréhender, tout graphe dans cette classe est isomorphe à un sous-graphe d'un produit de graphes plus simples à appréhender. Un des résultats de cette théorie a été démontré récemment par Dujmovic, Hickingbotham, Joret, Micek, Morin et Wood dans l'article [1]. Ce résultat dit que, pour tout arbre T de rayon h , il existe une constante $c \in \mathbb{N}$ telle que pour tout graphe G excluant T comme mineur il existe un graphe H de pathwidth au plus $2h - 1$ tel que G est isomorphe à un sous-graphe du produit $H \boxtimes K_c$.

Ce théorème est une version og structure de produit fg du célèbre théorème de Bienstock, Robertson, Seymour et Thomas [2] qui dit que pour tout forêt F , tous les graphes excluant F comme mineur ont pathwidth $\leq |V(F)| - 2$. L'article [1] montre que la borne $2h - 1$ sur la pathwidth est optimale. Par contre, la constante c est en $O(|V(T)|^2)$, et n'est a priori pas optimale. Avec Gwenaél Joret, nous avons montré qu'il était possible de prendre $c \in O(|V(T)|)$, ce qui est presque optimal.

Références

- [1] Dujmović, V., Hickingbotham, R., Joret, G., Micek, P., Morin, P. et Wood, D. R. (2024). *The excluded tree minor theorem revisited*. *Combinatorics, Probability and Computing*, 33(1), 85-90.
- [2] Bienstock, D., Robertson, N., Seymour, P. D., & Thomas, R. (1991). *Quickly excluding a forest*. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 52(2), 274-283.

Shallow vertex minors, stability, and dependence

Hector Buffière, IRIF, Université Paris Cité, et CAMS, EHESS, hector.buffiere@ens.fr
Eunjung Kim, School of Computing, KAIST, eunjungkim78@gmail.com
Patrice Ossona de Mendez, CAMS, EHESS, pom@ehess.fr

Stability and *dependence* are model-theoretic notions that have recently proved highly effective in the study of structural and algorithmic properties of hereditary graph classes [1, 2], and are considered key notions for generalizing to hereditary graph classes the theory of sparsity developed for monotone graph classes (where an essential notion is that of *nowhere dense* class). The theory of sparsity was initially built on the notion of *shallow minors* and on the idea of excluding different sets of minors, depending on the depth at which these minors can appear.

In this work, we follow a similar path, where *shallow vertex minors* replace shallow minors. Vertex minors are a containment relation that is well suited for the study of hereditary and dense classes of graphs, related to the notions of flips and pivot minors. They generalize several properties of classical graph minors to dense graphs. Their shallow variant is newer and this work advocates for its usefulness in the structural study of hereditary classes of graphs. In this setting, we provide a neat characterization of stable/dependent hereditary classes of graphs : A hereditary class of graphs \mathcal{C} is

- *dependent* if and only if it does not contain all permutation graphs and, for each integer r , it excludes some split interval graph as a depth- r vertex minor ;
- *stable* if and only if, for each integer r , it excludes some half-graph as a depth- r vertex minor.

A key ingredient in proving these results is the preservation of stability and dependence of a class when taking bounded depth shallow vertex minors. We extend this preservation result to binary structures and get, as a direct consequence, that bounded depth shallow vertex minors of graphs with bounded twin-width have bounded twin-width.

Références

- [1] J. Dreier, and I. Eleftheriadis, and N. Mählmann, and R. McCarty, and M. Pilipczuk, and S. Toruńczyk, *First-Order Model Checking on Monadically Stable Graph Classes*, arXiv preprint 2311.18740 [cs.LO], 2023.

- [2] J. Dreier, and N. Mählmann, and S. Toruńczyk, *Flip-Breakability : A Combinatorial Dichotomy for Monadically Dependent Graph Classes*, arXiv preprint 2403.15201v1 [math.CO], 2024.

Coloring bridge-free antiprismatic graphs

C. Robin, Greyc, UNICAEN, cleophee.robin@unicaen.fr

[E. Robinson](mailto:E.Robinson@ulb.be), Département de Mathématique, Université libre de Bruxelles,
eileen.robinson@ulb.be

The vertex coloring problem is known to be NP-complete in the general case but it is in P if restricted to certain classes of graph. Those of greatest interest to us are the classes defined by forbidden induced subgraphs. Given a set of graphs \mathcal{H} , we denote $\text{Free } \mathcal{H}$ the class of graphs that does not contain any graph of \mathcal{H} as induced subgraph. Among the classes for which the complexity of the coloring problem is still unknown, we focused on $\text{Free}\{K_{1,3}, 2P_1 + P_2, 4K_1\}$.

A graph G is *prismatic* if for every triangle T of G , every vertex of G that is not in T , has a unique neighbor in T . The complement of a prismatic graph is called antiprismatic. It can be easily seen that the antiprismatic graphs are exactly the graphs in $\text{Free}\{K_{1,3}, 2P_1 + P_2, 4K_1\}$. Therefore, solving the vertex coloring problem in that class is equivalent to solving the clique covering problem in prismatic graphs.

Chudnovsky and Seymour gave a full structural description of prismatic graphs. They divided the class in two subclasses : the orientable prismatic graphs and the non-orientable prismatic graphs. Preissman, Robin and Trotignon gave an algorithm to solve the clique covering problem in non-orientable prismatic graphs in polynomial time.

We show that this algorithm can also be used to solve the problem on prismatic graphs with no induced $2K_1 + C_4$, whether they are orientable or not. To achieve this, we show that each graph in this class has a bounded number of vertex disjoint triangles through a cautious analysis of their structure.

Références

- [1] M. Chudnovski and P. Seymour, *Claw-free graphs. I. Orientable prismatic graphs*, J. of Combinatorial Theory, Series B **97** (2007), 867–903.
- [2] M. Chudnovski and P. Seymour, *Claw-free graphs. II. Non-orientable prismatic graphs*, J. of Combinatorial Theory, Series B **98** (2008), 249–290.
- [3] M. Preissman, C. Robin and N. Trotignon, *On the Complexity of Colouring Antiprismatic Graphs*, Algorithmica **83** (2021), 589–612.
- [4] C. Robin, E. Robinson, *Coloring bridge-free antiprismatic graphs*, arXiv :2408.01328.

Subcoloring of (unit) disks graphs

Malory Marin, Univ Lyon, CNRS, ENS de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, LIP UMR5668, France malory.marin@ens-lyon.fr

Rémi Watrigant, Univ Lyon, CNRS, ENS de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, LIP UMR5668, France remi.watrigant@univ-lyon1.fr

A subcoloring of a graph is a partition of its vertex set such that the subgraph induced by each subset does not contain a path on three vertices as an induced subgraph (or equivalently, is a disjoint union of cliques). By extension, the subchromatic number of a graph is the minimum number of colors of a subcoloring of it, and the k -subcoloring problem asks whether a given graph has subchromatic number at most k . This problem has already been studied from algorithmic and structural aspects, in particular for several subclasses of perfect graphs or planar graphs. In this paper we focus on geometrical intersection graphs, and more precisely (unit) disk graphs. We first prove that 2-Subcoloring remains NP-hard in unit disk graphs with clique size at most 3. We then provide several algorithms and structural bounds. We show that the subchromatic number of a unit disk graph is at most 7, and can be 3-approximated in polynomial time. Finally, we show that every n -vertex disk graph admits a subcoloring with at most $O(\log^3(n))$ colors. This is achieved by defining a decomposition and special kind of comparability disk graphs that we call Δ -disk graphs.

Références

- [1] Albertson, M. O., Jamison, R. E., Hedetniemi, S. T., & Locke, S. C. (1989). *The subchromatic number of a graph*. In Annals of Discrete Mathematics (Vol. 39, pp. 33–49). Elsevier.
- [2] Broersma, H., Fomin, F. V., Nešetřil, J., & Woeginger, G. J. (2002). *More about subcolorings*. Computing, 69(3), 187–203.
- [3] Fiala, J., Jansen, K., Le, V. B., & Seidel, E. (2003). *Graph subcolorings : complexity and algorithms*. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 16(4), 635–650.
- [4] Gimbel, J., & Hartman, C. (2003). *Subcolorings and the subchromatic number of a graph*. Discrete Mathematics, 272(2–3), 139–154.