Sur la complexité de l'ensemble Indépendant Dominant avec des Obligations faibles dans les graphes

Timothée Martinod, LIFO, Université d'Orléans,
timothee.martinod@univ-orleans.fr

Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble *dominant indépendant* d'un graphe $G = (V, E)$ si D est un ensemble indépendant (il n'existe aucune arête entre les sommets de D) et dominant tous les sommets de G (chaque sommet de $V - D$ a un voisin dans D). Le problème de l'ensemble Indépendant Dominant avec Obligations faibles (*IDOf*) en propose une généralisation. Une instance de notre problème est un graphe G, des obligations $\Pi = (V_1, \ldots, V_k)$ sur les sommets de V et un seuil $\kappa \geq 0$. Lorsque $\kappa > 0$, les obligations sont dites *faibles*. Un ensemble Indépendant Dominant avec Obligations faibles (*IDOf*) D dans une instance (G, Π, κ) est un ensemble dominant indépendant avec une contrainte supplémentaire : si *plus de* κ sommets d'une obligation V_i appartiennent à D, alors tous les autres sommets de V_i doivent aussi appartenir à D : pour chaque $i = 1, \ldots, k$, soit $|V_i \cap D| \leq \kappa$ soit $V_i \subseteq D$ (l'ensemble D *respecte* les obligations faibles Π). Le problème de décider si une instance (G, Π, κ) contient un *IDOf* sera nommé *problème IDOf*. Le problème *IDOf* généralise les obligations telles que définies dans [1].

Soit λ la taille de la plus grande obligation. Nous montrons que lorsque $\kappa = \lambda - 1$ le problème *IDOf* est polynomial quelle que que soit la topologie du graphe. S'il existe une constante λ telle que pour chaque $i = 1, \ldots, k$, $|V_i| = \lambda$ alors nous disons que les obligations sont λ-équilibrées. Nous montrons que le problème *IDOf* est $\mathcal{NP}$-complet dans différents cas, selon la topologie du graphe, le seuil choisi et la présence d'obligations fortes. La plupart des problèmes algorithmiques sont triviaux ou faciles à résoudre dans les chemins et les arbres. Cependant, nous montrons que si l'instance contient des obligations fortes alors le problème *IDOf* est $\mathcal{NP}$-complet, même si G est un chemin pour toute répartition des obligations λ-équilibrées faibles et fortes. Dans le cas où toutes les obligations sont faibles, nous montrons que le problème *IDOf* est $\mathcal{NP}$-complet pour tout seuil $\kappa \geq 1$ dans les collections de chemins avec des obligations λ-équilibrées et dans les arbres.

Références

[1] C. Laforest and T. Martinod, *On the complexity of independent dominating set with obligations in graphs*, Theoritical Computer Science (2022), 1–14.