

## Un graphe pour les gouverner tous

Tara Abrishami, University of Hamburg, [tara.abrishami@uni-hamburg.de](mailto:tara.abrishami@uni-hamburg.de)  
Marthe Bonamy, LaBRI, Université de Bordeaux, [marthe.bonamy@u-bordeaux.fr](mailto:marthe.bonamy@u-bordeaux.fr)  
Cyril Gavoille, LaBRI, Université de Bordeaux, [cyril.gavoille@u-bordeaux.fr](mailto:cyril.gavoille@u-bordeaux.fr)  
Claire Hilaire, FAMNIT, University of Primorska, [claire.hilaire@upr.si](mailto:claire.hilaire@upr.si)  
Alexandra Wesolek, Technische Universität Berlin, [agwesole@sfu.ca](mailto:agwesole@sfu.ca)

Depuis le célèbre Grid Minor Theorem de Robertson Seymour et Thomas [1], nous savons que tous les graphes planaires à au plus  $n$  sommets sont mineurs de la grille carré (donc aussi planaire) à  $4n^2$  sommets. Avec Cyril Gavoille, nous avons prouvé récemment que ce résultat se généralise à toutes les classes de graphes plongeable sur une surface [2] : pour toute surface  $\Sigma$ , il existe  $c$  tel que pour tout  $n$ , il existe un graphe  $U_n$  plongeable sur  $\Sigma$  avec au plus  $cn^2$  sommets qui admet pour mineur tous les graphes d'au plus  $n$  sommets plongeables sur  $\Sigma$ .

On dit alors que  $U_n$  est un *majeur universel* pour la classe des graphes à au plus  $n$  sommets plongeable sur  $\Sigma$ , et de façon similaire, la grille à  $cn^2$  sommets est un majeur universel pour la classe des graphes planaires à au plus  $n$  sommets.

Ces travaux amènent à se demander si l'on peut trouver un tel majeur universel de taille polynomial pour toutes les classes closes par mineur :

**Conjecture.** *Pour toute famille de graphes  $\mathcal{F}$ , il existe une constante  $c$  telle que pour tout  $n$ , il existe un graphe excluant  $\mathcal{F}$  comme mineur et avec au plus  $n^c$  sommets, qui est majeur universel pour la classe des graphes à au plus  $n$  sommets et excluant  $\mathcal{F}$  comme mineur.*

Dans un projet en cours avec Tara Abrishami, Marthe Bonamy, Cyril Gavoille et Alexandra Wesolek, nous nous intéressons à cette conjecture. Elle s'avère être fausse dans le cas général, mais nous trouvons plusieurs classes classiques qui vérifient la conjecture, et nous prouvons une version approximative de la conjecture dans le cas général.

## Références

- [1] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, *Quickly Excluding a Planar Graph.*, J. Comb. Theory B **62** (1994), 323–348.
- [2] C. Gavoille and C. Hilaire *Minor-Universal Graph for Graphs on Surfaces*, Tech. Rep. 2305.06673, arXiv, (2023).