

Colorations de type Brooks en temps linéaire

Daniel Gonçalves, CNRS, LIRMM, U. Montpellier daniel.goncalves@lirmm.fr

Lucas Picasarri-Arrieta, NII, Japan lucaspicasarri@gmail.com

Amadeus Reinald, LIRMM, U. Montpellier amadeus.reinald@lirmm.fr

Le théorème de Brooks, datant de 1941, est un résultat fondamental sur la coloration de graphes, énonçant que le nombre chromatique d'un graphe est presque toujours borné par son degré maximal. Lovász a montré en 1975 que, lorsqu'une telle coloration existe, elle peut être produite en temps linéaire.

Depuis, de nombreuses variantes de coloration de (di)graphes ont été introduites, et presque autant d'analogues du théorème de Brooks ont été montrés pour ces notions. Une des colorations les plus générales pour lesquelles un tel analogue a été obtenu est due à Bang-Jensen, Schweser et Stiebitz [1]. Etant donné un digraphe D et un vecteur de fonctions $f = f_1, \dots, f_p$, on veut colorer les sommets avec p couleurs tel que la couleur i soit " f_i -dégénérée". Alors, l'analogue du théorème de Brooks est le suivant :

Theorem 1 (B-J,S,S '20) *Soit D un digraphe connecté, et f tel que $f_1(v) + \dots + f_p(v) \geq \max(d^+(v), d^-(v))$ pour tout $v \in V(D)$. Alors, D est f -partitionnable ssi (D, F) n'est pas une "hard pair"¹.*

Pour cette notion et d'autres moins générales, un algorithme polynomial existe pour décider de l'existence de la coloration, et pour la produire.

Nous généralisons cette notion par le concept de F -dicoloration, à travers un nouveau paramètre de digraphes appelé bidégénérescence. Nous montrons un analogue du théorème de Brooks correspondant, en caractérisant les "hard pair" pour cette notion. Enfin, nous montrons un algorithme linéaire décidant si une instance est F -dicolorable, et produisant la coloration. De cette manière, cet algorithme est aussi capable de produire les colorations des notions que nous généralisons de manière unifiée, et en temps linéaire. Ces travaux apparaissent dans [2].

Références

- [1] J. Bang-Jensen, T. Schweser, M. Stiebitz, *Digraphs and variable degeneracy*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **36(1)** (2022)
- [2] D. Gonçalves, L. Picasarri-Arrieta, A. Reinald, *Brooks-type colourings of digraphs in linear time*, arXiv : **2405.05222**

1. Les hard pairs sont des instances construites inductivement explicitées dans [1].