Orientation contrainte d'un graphe partiellement orienté

Matthieu Petiteau, Institut Fourier, UGA
matthieu.petiteau@univ-grenoble-alpes.fr

Soit $G = (V, E, A)$ un graphe partiellement orienté où E est l'ensemble les arêtes de G et A l'ensemble de ses arcs. Une orientation $\overrightarrow{G}$ de G consiste en l'affectation d'une direction à chaque arête dans E.
Une première contrainte locale que l'on se propose d'observer est une contrainte de parité. Soit T un sous-ensemble des sommets, on dit qu'une orientation $\overrightarrow{G}$ est T-impaire si pour tout sommet v, v a un degré entrant impair dans $\overrightarrow{G}$ si et seulement si v appartient à T.
Chevalier et al. (1983) [1] donnent une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une orientation T-impaire dans un graphe non orienté :

Theoreme 1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et T un sous-ensemble des sommets. G admet une orientation T-impaire si et seulement si $|T| \equiv_2 |E|$.*

Depuis le problème a été complexifié en ajoutant d'autres contraintes globales sur l'orientation, en particulier la contrainte d'acyclicité. Une orientation est dite acyclique si elle ne contient pas de circuit. Szegedy (2005)[2] propose alors un algorithme probabiliste polynomial permettant de déterminer l'existence d'une orientation acyclique T-impaire dans un graphe non orienté.

Dans le but de généraliser ce problème, nous l'étudions sur les graphes partiellement orientés, nous montrons qu'il est alors NP-complet :
Soit $G = (V, E, A)$ un graphe partiellement orienté et T un sous-ensemble des sommets, existe-t-il une orientation acyclique T-impaire de G ?

Références

[1] O. Chevalier et al. *Odd Rooted Orientations and Upper-Embeddable Graphs.* In : North-Holland Mathematics Studies, T. 75. Elsevier, 1983.

[2] C. Szegedy. *Some Applications of the Weighted Combinatorial Laplacian.* Thèse de doct. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2005